TEXTOS DOCENTS

352

FONAMENTS DE FÍSICA
Grau de Matemàtiques

Jaume Masoliver

Departament de Física Fonamental

UNIVERSITAT DE BARCELONA

TEXTOS DOCENTS

352

FONAMENTS DE FÍSICA
Grau de Matemàtiques

Jaume Masoliver

Departament de Física Fonamental

Publicacions i Edicions

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Índex

1 Vectors, cinemàtica i camps vectorials **7**
- 1.1 Vectors . . . 7
  - 1.1.1 Propietats algebraiques . . . 7
  - 1.1.2 Diferenciació i integració de vectors . . . 10
- 1.2 Cinemàtica . . . 12
  - 1.2.1 El moviment rectilini . . . 12
  - 1.2.2 El moviment circular . . . 13
- 1.3 Camps vectorials . . . 14
  - 1.3.1 Gradient, divergència i rotacional . . . 14
  - 1.3.2 Flux. El teorema de Gauss . . . 16
  - 1.3.3 Circulació. El teorema de Stokes . . . 18
  - 1.3.4 El laplacià i altres propietats dels camps . . . 20
  - 1.3.5 El laplacià de la funció $\phi(r) = 1/r$ . . . 22

2 Dinàmica newtoniana **27**
- 2.1 Les lleis de Newton . . . 27
- 2.2 Les forces de la natura . . . 31
  - 2.2.1 Les forces fonamentals . . . 31
  - 2.2.2 Forces de contacte . . . 32
- 2.3 Aplicació de les lleis de Newton . . . 34
- 2.4 El treball i l'energia . . . 38
- 2.5 Forces conservatives. Energia potencial . . . 42
  - 2.5.1 Moviment en una dimensió . . . 42
  - 2.5.2 Moviment en més d'una dimensió . . . 44
  - 2.5.3 L'energia potencial gravitatòria . . . 46
- 2.6 La llei de conservació de l'energia . . . 51
- 2.7 Resum dels teoremes de conservació. El moment cinètic . . . 56

3 Sistemes de partícules **59**
- 3.1 Teoremes de conservació del moment lineal i del moment angular . . . 60
  - 3.1.1 Conservació del moment lineal. El centre de masses . . . 60
  - 3.1.2 Conservació del moment cinètic . . . 63
- 3.2 La conservació de l'energia . . . 64
- 3.3 Col·lisions . . . 67
- 3.4 El problema dels dos cossos . . . 72

4 El sòlid rígid **77**
4.1 Sistemes rígids . . . 77
4.2 Velocitat angular . . . 78
4.3 Energia cinètica de rotació . . . 79
4.4 El tensor d'inèrcia . . . 82
4.5 Moment cinètic del sòlid rígid . . . 87
4.6 Equacions del moviment del sòlid rígid . . . 89
4.7 L'estàtica dels cossos rígids . . . 92

5 Gravitació **95**
5.1 La llei de la gravitació universal . . . 95
5.2 El camp gravitatori . . . 97
5.2.1 Distribucions esfèriques de massa . . . 99
5.2.2 Autoenergia gravitatòria . . . 103
5.2.3 La força de marea . . . 106
5.3 Les òrbites planetàries . . . 108
5.3.1 Les lleis de Kepler . . . 108
5.3.2 El problema dels N cossos sota interacció gravitatòria . . . 110
5.3.3 Òrbites planes. La llei de les àrees . . . 112
5.3.4 Les equacions del moviment . . . 114
5.3.5 Les òrbites planetàries . . . 116
5.3.6 Deducció de la tercera llei de Kepler . . . 119

6 Electromagnetisme **121**
6.1 Electrostàtica . . . 121
6.1.1 El camp elèctric . . . 122
6.1.2 La llei de Gauss . . . 126
6.1.3 El potencial elèctric . . . 130
6.1.4 Les equacions de Poisson i Laplace . . . 133
6.1.5 Conductors i dielèctrics . . . 134
6.2 El corrent elèctric . . . 136
6.3 El camp magnètic . . . 142
6.3.1 La força magnètica . . . 143
6.3.2 Fonts del camp magnètic . . . 147
6.3.3 Propietats diferencials del camp magnètic . . . 150
6.4 La inducció electromagnètica. Les equacions de Maxwell . . . 152
6.4.1 La llei de Faraday . . . 152
6.4.2 Les equacions de Maxwell . . . 154
6.4.3 L'energia del camp electromagnètic . . . 155
6.5 Les ones electromagnètiques . . . 157
6.5.1 Ones planes monocromàtiques . . . 159

A Demostració de la llei d'Ampère-Maxwell **165**

B Problemes **169**
Solucions . . . 179

Capítol 1

Vectors, cinemàtica i camps vectorials

1.1 Vectors

L'experiència ens ensenya que hi ha magnituds que no es determinen només pel seu valor numèric —amb les corresponents dimensions—, sinó que a més és necessari especificar la direcció i el sentit en què actuen. Són les *magnituds vectorials*. En són exemples, entre molts d'altres, la força, la velocitat i la posició respecte d'un punt fix. Les magnituds en què el seu efecte no depèn de la direcció i, per tant, només estan representades per un nombre real, s'anomenen *magnituds escalars*. La massa, l'energia i el voltatge són exemples de magnituds escalars.

Així com les magnituds escalars es representen per nombres, les magnituds vectorials es caracteritzen per *vectors*. Si tenim un sistema de referència cartesià, una forma de representar, dins l'espai tridimensional, un vector $\vec{A}$ arbitrari, que suposem que surt de l'origen i apunta a un punt determinat, és

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \tag{1.1}$$

on (A_x, A_y, A_z) són les coordenades del punt (vegeu la figura 1.1). Amb aquesta representació geomètrica, el mòdul del vector és la distància entre l'origen i el punt:

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Veiem, doncs, que qualsevol magnitud vectorial en tres dimensions es representa per tres nombres, que equivalen a la intensitat (és a dir, el mòdul), la direcció i el sentit.

1.1.1 Propietats algebraiques

De forma semblant als nombres, els vectors es poden sumar i multiplicar. Ara definirem aquestes operacions algebraiques i començarem per la multiplicació d'un vector $\vec{A}$ per un escalar c:

$$c\vec{A} = (cA_x, cA_y, cA_z).$$

La suma (o resta) de dos vectors es defineix per

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z).$$

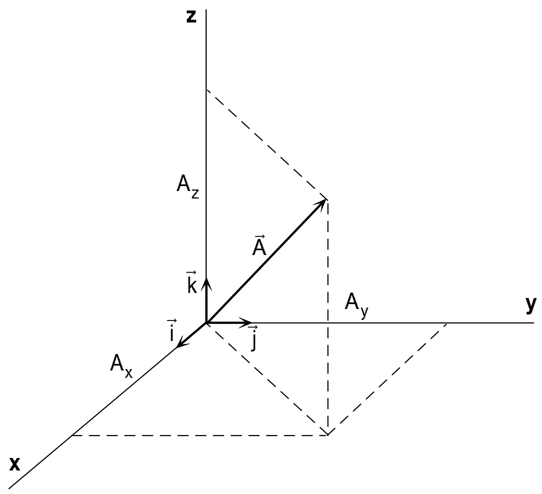

Figura 1.1: Representació cartesiana d'un vector tridimensional

També és molt senzill demostrar la propietat de linealitat:

$$c(\vec{A}+\vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}.$$

La generalització a un nombre arbitrari de vectors és directa. Així, per exemple, la suma de n vectors és el vector

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} A_{x_i}, \sum_{i=1}^{n} A_{y_i}, \sum_{i=1}^{n} A_{z_i} \right),$$

i també

$$c\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c\vec{A}_i.$$

Aquestes operacions lineals ens permeten donar una representació analítica dels vectors que és alternativa (i equivalent) a la donada en l'equació (1.1). Per això definim els vectors $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de mòdul unitat dirigits al llarg dels eixos x, y, z, respectivament, i coincidents amb el sentit positiu d'aquests eixos. És a dir,

$$\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0), \qquad \vec{k} = (0,0,1);$$

llavors, com podem veure fàcilment de les definicions de suma i producte per un escalar que acabem de presentar, una representació analítica del vector $\vec{A}$ equivalent (1.1) és

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}.$$

Hi ha dues maneres de multiplicar vectors. Un tipus de multiplicació dóna com a resultat un número: és el *producte escalar*. L'altre tipus dóna un vector i per això se l'anomena *producte vectorial*.

El *producte escalar* de dos vectors és el producte dels mòduls pel cosinus de l'angle θ que formen els dos vectors:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta.$$

D'aquesta definició és molt senzill demostrar que el producte escalar satisfà les propietats següents:

$$\begin{aligned}
(c\vec{A})\cdot\vec{B} &= \vec{A}\cdot(c\vec{B}) = c(\vec{A}\cdot\vec{B})\\
\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\\
\vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A}\\
\vec{A}\cdot\vec{A} &= A^2;
\end{aligned}$$

i també

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= AB, \quad \text{quan } \vec{A} \text{ és paral·lel a } \vec{B}\\
\vec{A}\cdot\vec{B} &= 0, \quad \text{quan } \vec{A} \text{ és perpendicular a } \vec{B};
\end{aligned}$$

a més:

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{i} &= \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\\
\vec{i}\cdot\vec{j} &= \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.
\end{aligned}$$

Fent servir aquestes propietats es dedueix molt fàcilment que, en components, el producte escalar és

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

El *producte vectorial* de dos vectors, $\vec{A}\times\vec{B}$, es defineix com un vector perpendicular al pla que formen els vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ amb el sentit donat per la «regla del tornavís» i de mòdul igual a l'àrea del paral·lelogram de costats $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta.$$

Les propietats algebraiques que se segueixen d'aquesta definició són les següents:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= -\vec{B}\times\vec{A}\\
(c\vec{A})\times\vec{B} &= \vec{A}\times(c\vec{B}) = c(\vec{A}\times\vec{B})\\
\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}\\
\vec{A}\times\vec{A} &= 0;
\end{aligned}$$

i també

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= 0, \quad \text{quan } \vec{A} \text{ és paral·lel a } \vec{B}\\
|\vec{A}\times\vec{B}| &= AB, \quad \text{quan } \vec{A} \text{ és perpendicular a } \vec{B};
\end{aligned}$$

a més:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0,$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}.$$

Mitjançant l'ús d'aquestes propietats, deixem que el lector demostri que el producte vectorial en components és

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x),$$

o de forma equivalent

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Finalment, també es poden demostrar les identitats següents:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\ \vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) &= 1. \end{aligned}$$

1.1.2 Diferenciació i integració de vectors

Un vector $\vec{A}$ és funció d'una variable escalar t, quan per cada valor de t li correspon un cert vector $\vec{A}(t)$, o, algebraicament, quan els components són funcions de t:

$$\vec{A} = \vec{A}(t) = \big(A_x(t), A_y(t), A_z(t)\big).$$

Els conceptes de límit, derivada i integral es poden estendre a funcions vectorials mitjançant aquestes definicions:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{A}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} A_x(t), \lim_{t \to t_0} A_y(t), \lim_{t \to t_0} A_z(t) \right),$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right),$$

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \left(\int_a^b A_x(t)dt, \int_a^b A_y(t)dt, \int_a^b A_z(t)dt \right).$$

Òbviament hom ha de suposar que els components de la funció vectorial són funcions diferenciables i integrables.

La derivada i la integral són operacions lineals:

$$\frac{d}{dt}\left(c_1\vec{A} + c_2\vec{B}\right) = c_1\frac{d\vec{A}}{dt} + c_2\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\int_a^b \left[c_1\vec{A}(t) + c_2\vec{B}(t)\right] dt = c_1 \int_a^b \vec{A}(t)dt + c_2 \int_a^b \vec{B}(t)dt,$$

com podem veure immediatament de les definicions anteriors.

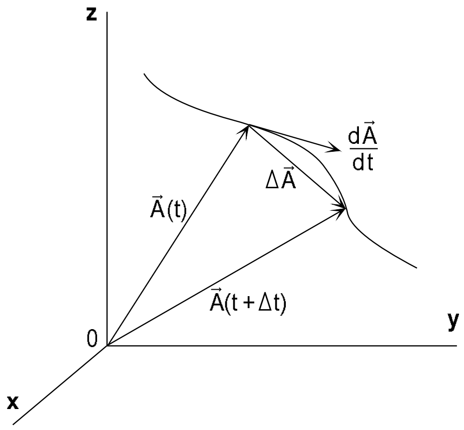

Figura 1.2: Interpretació geomètrica de la derivada d'una funció vectorial

Observem que, en variar el paràmetre t, l'extrem de $\vec{A}(t)$ descriu una corba. En altres paraules, *la representació gràfica de $\vec{A}(t)$ és una corba a l'espai.* D'altra banda, combinant la definició de límit i la de derivada podem veure que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Aquesta definició alternativa de derivada ens dóna la interpretació geomètrica següent (vegeu la figura 1.2): *La derivada de $\vec{A}(t)$ és un vector tangent a la corba representada per $\vec{A}(t)$.*

Altres propietats de la derivada són

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) &= \frac{d\phi}{dt}\vec{A} + \phi\frac{d\vec{A}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}, \end{aligned}$$

on $\phi = \phi(t)$ és una funció escalar diferenciable.

• **Exemple**. *Suposem una funció vectorial diferenciable i de mòdul constant. En aquest cas la seva derivada és un vector perpendicular a la funció vectorial pròpia.*

En efecte, sigui $\vec{A}(t)$ tal que

$$A(t) = |\vec{A}(t)| = \text{ constant},$$

òbviament $A^2 =$ constant i per tant $dA^2/dt = 0$. D'altra banda sabem que $A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$; així, doncs,

$$\frac{dA^2}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0,$$

és a dir, $\vec{A}$ i $d\vec{A}/dt$ són perpendiculars.

1.2 Cinemàtica

Suposem que una partícula o punt material es mou dins l'espai de dues o tres dimensions. La posició de la partícula respecte d'un cert sistema de coordenades ens la donarà un vector variable amb el temps, $\vec{r}(t)$, anomenat *vector de posició*. La corba descrita per $\vec{r}(t)$ és la *trajectòria* de la partícula. En coordenades cartesianes,

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

La derivada del vector de posició respecte del temps és la *velocitat*:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

o, en components,

$$\vec{v}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big),$$

on $\dot{x} = dx/dt$ i també per a $\dot{y}$ i $\dot{z}$. Observem, pel que hem vist a la secció anterior, que *la velocitat és un vector tangent a la trajectòria de la partícula.* Notem també que si coneixem la velocitat de la partícula, el vector de posició ens el donarà

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt', \tag{1.2}$$

on $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ és la posició en un cert instant inicial t_0.

La derivada de la velocitat —és a dir, la derivada segona del vector de posició— és l'*acceleració*:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2},$$

en components

$$\vec{a}(t) = \big(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\big),$$

on la notació $\ddot{x}$, etc. indica la derivada segona. En funció de l'acceleració la velocitat és

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt', \tag{1.3}$$

sent $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ és la velocitat inicial. Veiem doncs que, *coneixent la posició i la velocitat de la partícula en un cert instant inicial i l'acceleració en qualsevol instant, la posició i la velocitat del mòbil són determinades en qualsevol temps posterior.*

1.2.1 El moviment rectilini

Per al moviment rectilini el vector de posició té la forma

$$\vec{r}(t) = \vec{A} + \phi(t)\vec{B}, \tag{1.4}$$

on $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són vectors constants independents del temps i $\phi(t)$ és una funció escalar arbitrària. El moviment es realitza al llarg de la recta que passa pel punt representat pel vector $\vec{A}$ i és paral·lela al vector $\vec{B}$. La velocitat i l'acceleració són

$$\vec{v}(t) = \dot{\phi}(t)\vec{B}, \qquad \vec{a}(t) = \ddot{\phi}(t)\vec{B}.$$

El vector acceleració és, doncs, paral·lel al vector velocitat i ambdós porten la direcció de la recta del moviment determinada pel vector $\vec{B}$.

En el cas que $\phi(t)$ sigui una funció lineal del temps $\phi(t) = a + bt$ (a i b constants), llavors $\dot{\phi}(t) = b$, fet que implica $\vec{v}(t) = b\vec{B}$, o sigui $\vec{v}(t) =$ constant, i el moviment és uniforme.

D'altra banda en un moviment uniforme, $\vec{v}(t) =$ constant, i de (1.2) tenim $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ i el moviment és rectilini.

Suposem ara que la funció $\phi(t)$ de (1.4) és una funció quadràtica del temps, $\phi(t) = a+bt+ct^2$, en aquest cas $\ddot{\phi}(t) = 2c$, per tant $\vec{a}(t) =$ constant i el moviment és uniformement accelerat.

Observem finalment que en el moviment rectilini podem obviar fàcilment el caràcter vectorial escollint un sistema de referència en què un dels eixos (per exemple, l'eix x) coincideixi amb la recta del moviment.

1.2.2 El moviment circular

El moviment circular és un moviment pla. Escollint, sense pèrdua de generalitat, el sistema de coordenades en què el pla del moviment coincideixi amb el pla xy, tenim que el vector de posició d'una partícula que descriu una circumferència de radi R és

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\sin\theta(t)\vec{j}, \tag{1.5}$$

on l'angle $\theta = \theta(t)$ és una funció del temps. Observem que el mòdul del vector de posició $|\vec{r}(t)| = R$ és constant, és a dir, la distància de la partícula al centre de coordenades es manté fixa tot el temps; es tracta, efectivament, d'un moviment circular.

La velocitat $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ és

$$\vec{v}(t) = -R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{i} + R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\vec{j}. \tag{1.6}$$

En les dues equacions anteriors comprovem fàcilment que $\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$ (per tot t) i, per tant, la velocitat és perpendicular al radi. En altres paraules, $\vec{v}(t)$ és tangent a la circumferència (vegeu l'exemple de la Secció I).

El mòdul de la velocitat és

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = R|\dot{\theta}(t)|.$$

El factor

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

s'anomena *velocitat angular* de la partícula. La seva relació amb el mòdul de la velocitat és

$$|\omega(t)| = \frac{v(t)}{R}.$$

L'acceleració, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, serà

$$\vec{a}(t) = \ddot{\theta}(t)[-R\sin\theta\vec{i} + R\cos\theta\vec{j}] - \theta^2[R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}],$$

la qual en funció de $\vec{v}(t)$ i $\vec{r}(t)$ es pot escriure de la forma

$$\vec{a}(t) = \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)}\vec{v}(t) - \dot{\theta}^2(t)\vec{r}(t).$$

Veiem, doncs, que l'acceleració de la partícula s'escriu com la suma:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_c(t),$$

d'una *acceleració tangencial* en la direcció de la velocitat:

$$\vec{a}_t(t) = \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)}\vec{v}(t) = R\ddot{\theta}(t)\big[-\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j}\big],$$

més una *acceleració centrípeta* (o normal) dirigida sempre cap al centre de la circumferència:

$$\vec{a}_n(t) = -\dot{\theta}^2(t)\vec{r}(t),$$

i que és, per tant, perpendicular a la velocitat i a l'acceleració tangencial. Els mòduls d'aquestes acceleracions són:

$$|\vec{a}_t(t)| = |\alpha(t)|R, \qquad |\vec{a}_c(t)| = \omega^2(t)R,$$

on $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ és la velocitat angular i $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$, *l'acceleració angular.*

Un cas particular important és el del *moviment circular uniforme*, en què la velocitat angular,

$$\omega(t) = \omega,$$

és constant; això implica, en particular, que el mòdul de la velocitat $|\vec{v}(t)|$ és constant. En aquest cas l'angle recorregut,

$$\theta(t) = \omega t,$$

és una funció lineal del temps (hem escollit $\theta(0) = 0$). Fixem-nos que ara l'acceleració angular

$$\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = 0$$

és nul·la. Així, doncs, en el moviment circular uniforme no hi ha acceleració tangencial i l'acceleració (total) del moviment és la centrípeta.

1.3 Camps vectorials

En física es parla del *camp* associat a una determinada magnitud quan el valor d'aquesta magnitud depèn de la seva localització en l'espai; dependència que se suposa contínua amb la possible excepció de certes superfícies, corbes o punts on pot haver-hi discontinuïtats. Si la magnitud és representada per una sola quantitat (és a dir, la magnitud és un escalar) llavors parlem d'un *camp escalar*, com per exemple els camps de densitats o els camps de temperatures. Si la magnitud és representada per un vector, tenim els *camps vectorials* com, per exemple, els camps de velocitats o els camps de forces (com ara el camp gravitatori o el camp electromagnètic), entre d'altres.

1.3.1 Gradient, divergència i rotacional

Suposem un camp escalar representat per la funció

$$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z).$$

Si anem des d'un punt, representat pel vector de posició $\vec{r} = (x, y, z)$, a un punt molt proper, representat per $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$, llavors la variació de la magitud escalar ϕ és determinada per la seva diferencial,

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}),$$

que en una primera aproximació —és a dir, negligint termes d'ordre igual o superior a $|d\vec{r}|^2$— és igual a:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$

Definint el *gradient* del camp escalar ϕ com el vector

$$\vec{\text{grad}}\ \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right),$$

veiem que $d\phi$ es pot escriure en forma de producte escalar

$$d\phi = \vec{\text{grad}}\ \phi \cdot d\vec{r},$$

on $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

Des d'un punt de vista formal el gradient d'una funció escalar es pot escriure en funció de l'anomenat operador *nabla*, definit en coordenades cartesianes per

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Així,

$$\vec{\text{grad}}\ \phi = \vec{\nabla} \phi.$$

En moltes aplicacions físiques és necessari determinar les regions de l'espai en què una determinada magnitud (eg. la temperatura) pren el mateix valor. Si la magnitud en qüestió és descrita pel camp escalar $\phi(\vec{r})$, llavors l'equació

$$\phi(x, y, z) = C$$

determina el conjunt de punts on ϕ pren el valor C. Observem que aquesta equació defineix, de forma implícita, una superfície en l'espai tridimensional $z = f(x, y, C)$. Observem, a més, que si canviem C per un altre valor C' obtenim una superfície diferent. Aquestes superfícies s'anomenen *superfícies de nivell.* Ara veurem que *el gradient és un vector perpendicular a les superfícies de nivell.* En efecte, en ser C un valor constant, la diferenciació de $\phi = C$ dóna $d\phi = 0$. Així, doncs,

$$\vec{\text{grad}}\ \phi \cdot d\vec{r} = 0$$

i, en ser $d\vec{r}$ tangent a la superfície, concloem que $\vec{\nabla}\phi$ és perpendicular a $\phi = C$.

El gradient és una operació diferencial de primer ordre (és a dir, involucra només derivades primeres) que s'efectua sobre un camp escalar. Ara veurem com, emprant l'operador $\vec{\nabla}$, sobre camps vectorials podem definir dues operacions diferencials diferents. Suposem un camp vectorial representat per la funció vectorial

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z);$$

llavors, *la divergència* del camp és el producte escalar de l'operador nabla per $\vec{A}$:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Observem, per tant, que la divergència d'un vector ens dóna un escalar.

La segona operació diferencial que podem definir sobre camps vectorials ens dóna un vector, *el rotacional*, que és el producte vectorial de l'operador $\vec{\nabla}$ pel camp:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

el qual, tenint en compte l'expressió en cartesianes del producte vectorial, podem escriure com

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

és a dir

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

1.3.2 Flux. El teorema de Gauss

Hem vist que la interpretació geomètrica del gradient d'un camp escalar és la d'un vector perpendicular a les superfícies de nivell on el camp és constant. Ara veurem les interpretacions geomètriques de la divergència i el rotacional d'un camp vectorial.

Comencem per la divergència. Un concepte fonamental de la física matemàtica és el de *flux* d'un camp vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ a través d'una superfície S. Sigui dS un element infinitesimal de superfície i sigui $\vec{n}$ un vector unitari perpendicular a la superfície en un punt de l'element dS. Definim el vector

$$d\vec{S} = \vec{n} dS,$$

llavors el flux d'$\vec{A}$ a través de S és la integral de superfície

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S A_n dS,$$

on hem tingut en compte que

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = \vec{A} \cdot \vec{n} dS = A_n dS,$$

on

$$A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$$

és la component del camp perpendicular a la superfície. Recordem que la *integral de superfície* d'una funció $f(x, y, z)$ es defineix pel límit de la suma integral

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

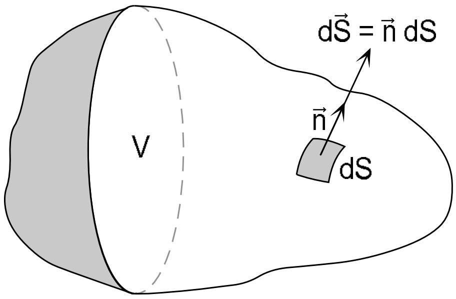

Figura 1.3: El teorema de Gauss

on ΔS_i és l'àrea d'un element i de la superfície S, al qual pertany el punt (x_i, y_i, z_i); el diàmetre màxim d'aquests elements en què es divideix la superfície S tendeix a zero quan $n \to \infty$. De forma semblant, si V és el volum d'una regió de l'espai tridimensional definirem la *integral de volum* de la funció $f(x, y, z)$ com

$$\int_V f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i,$$

on ara ΔV_i és un element de volum centrat en el punt (x_i, y_i, z_i). El volum V s'ha dividit en elements ΔV_i amb diàmetre màxim tendint a zero quan $n \to \infty$.

Sovint és necessari avaluar el flux a través d'una superfície tancada. En aquest cas escrivim simbòlicament

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

on se suposa que el vector $d\vec{S}$ va sempre dirigit a *l'exterior* de la superfície.

El concepte de flux i els conceptes de divergència i rotacional van ser desenvolupats durant la primera meitat del segle XIX, per Gauss, Green, Stokes i Helmholtz, entre d'altres, en connexió amb l'estudi dels medis continus (bàsicament fluids: líquids i gasos). En aquest context, si $\vec{A} = \vec{v}$ és el camp de velocitats d'un fluid incompressible —com, per exemple, un líquid— la magnitud Φ que acabem de definir representaria el volum de fluid que per unitat de temps flueix a través de la superfície S,[1] per això el nom *flux* donat a la magnitud Φ.

La interpretació geomètrica de div $\vec{A}$ està continguda en el resultat següent, anomenat **teorema de la divergència** o **teorema de Gauss**:

$$\boxed{\int_V \mathrm{div}\ \vec{A}\ dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

[1]En efecte, el flux $d\Phi$ que travessa l'element de superfície dS seria en aquest cas $d\Phi = v_n dS$, on v_n és el component de la velocitat $\vec{v}$ del líquid perpendicular a dS. Així, doncs, $v_n = dl/dt$, on dl és la distància perpendicular a dS recorreguda per les molècules del líquid en un temps dt. Per tant,

$$d\Phi = \frac{1}{dt} dl dS = \frac{dV}{dt},$$

on dV és el volum de líquid que travessa dS en un temps dt.