Temps d'Educació, 51, p. 223-247 (2016) Universitat de Barcelona

Una introducción al álgebra en el siglo XVI: «La regla de la cosa» de Juan Pérez de Moya

José Mª Núñez Espallargas[*]
Jordi Servat Susagne[**]

Resumen

El propósito del presente trabajo es el de mostrar, a través de uno de los textos más destacados de la época, como se introducía el álgebra en la enseñanza práctica de la matemática. Entre los objetivos que se pretenden alcanzar, además de los derivados del puro conocimiento histórico de los orígenes de este saber, están los de apreciar algunos aspectos de carácter metodológico de interés para la didáctica de la matemática: el papel de las notaciones y la utilización de los símbolos en el desarrollo de la matemática, las limitaciones que imponía el desconocimiento de ciertos recursos (como es el caso de los números decimales), o la importancia determinante que los aspectos aplicados tienen en la introducción y posterior desarrollo del álgebra.

Palabras clave

Historia del álgebra, enseñanza de la matemática, libros de texto de matemáticas, historia de las matemáticas, siglo XVI

Recepción original: 10 de novembre de 2015
Aceptación: 1 de febrer de 2016
Publicació: 20 de desembre de 2016

El álgebra en las aritméticas del siglo XVI

En el siglo XVI, ya en pleno Renacimiento europeo, junto a los manuales de aritmética dirigidos a los estudiantes de las universidades del viejo continente, que se inspiraban en la adaptación de las enseñanzas clásicas llevada a cabo por Boecio en el siglo V, comienzan a aparecer textos de aritmética orientados a un público más amplio, el constituido por los mercaderes, banqueros y artesanos de toda índole que necesitaban de las matemáticas para mejorar y perfeccionarse en sus respectivos oficios. Estas obras ya no están escritas en latín como los manuales académicos, sino en las diferentes lenguas romances y tienen su mirada puesta sobre todo en los aspectos prácticos, y no dudan en recurrir a las nuevas aportaciones de la cultura árabe y hebrea, por lo que no puede extrañar que el álgebra, como recurso matemático, ocupara también un lugar destacado entre sus páginas.

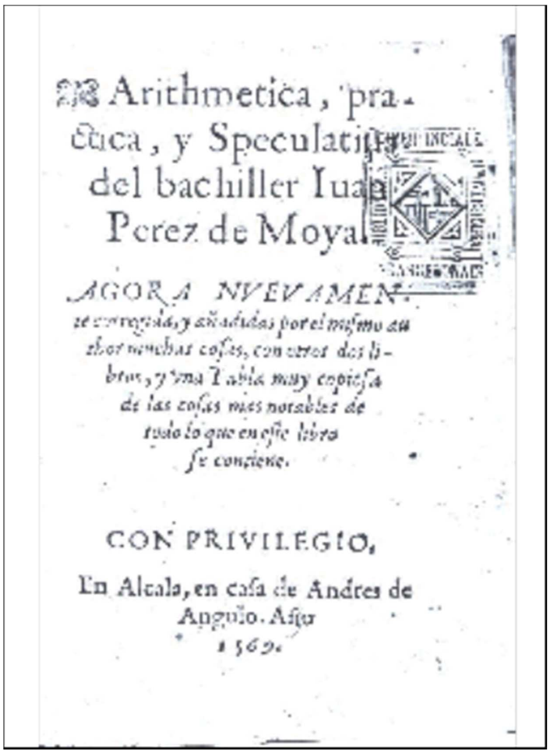
El propósito del presente trabajo es el de mostrar, a través de uno de los textos más destacados de la época, como se introducía el álgebra en la enseñanza práctica de la matemática. Entre los objetivos que se pretenden alcanzar, además de los derivados del puro conocimiento histórico de los orígenes de este saber, están los de apreciar algunos aspectos de carácter metodológico de interés para la didáctica de la matemática: el

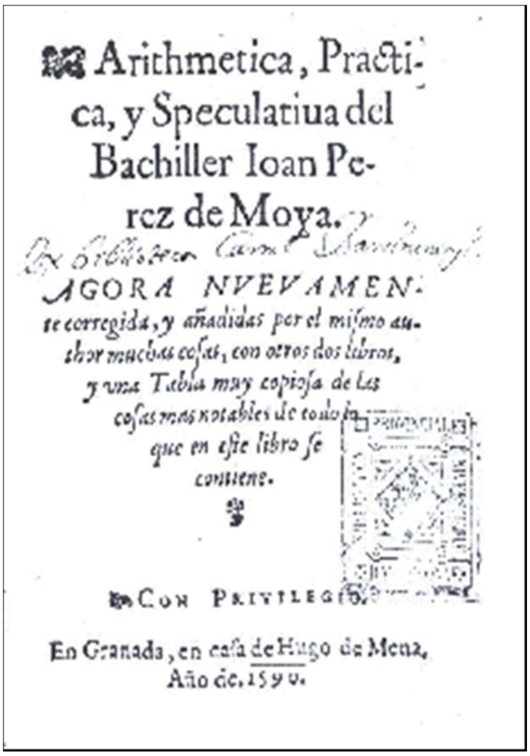
(*) Profesor emérito de la Universidad de Barcelona. Licenciado en Ciencias, en Historia y también en Pedagogía. Individualmente ha publicado diferentes libros y artículos sobre temas científicos y de enseñanza e historia de la matemática. Sobre estas temáticas también ha publicado diversos trabajos conjuntamente con el profesor Jordi Servat. Dirección electrónica: jmnunez@ub.edu

(**) Profesor titular de la Universidad de Barcelona. Licenciado en Ciencias. Ha publicado individualmente y conjuntamente con el profesor José María Núñez Espallargas diferentes trabajos y artículos en relación con la enseñanza y la historia de la matemática. Dirección electrónica: jservat@ub.edu

papel de las notaciones y la utilización de los símbolos en el desarrollo de la matemática, las limitaciones que imponía el desconocimiento de ciertos recursos (como es el caso de los números decimales), o la importancia determinante que los aspectos aplicados tienen en la introducción y posterior desarrollo del álgebra.

El texto elegido, la *Arithmética práctica y especulativa* (1562) de Juan Pérez de Moya, es una de las primeras aritméticas que, en lengua española, trataron con relativa extensión el tema del álgebra. Con anterioridad se habían publicado, en otras lenguas europeas distintas del latín, algunas aritméticas que incluían entre sus páginas cuestiones de álgebra, como la pionera *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità* (1494) escrita en toscano por Luca Pacioli o, en lengua alemana, *Die Coss* (1535) de Christoff Rudolff o, en lengua inglesa, *The Whetstone of Witte* (1557) de Robert Recorde.


Arithmetica, practica, y Speculatiua del bachiller Iuan Perez de Moya.
AGORA NVEVAMENte corregida, y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contiene.
CON PRIVILEGIO.
En Alcala, en casa de Andres de Angulo. Año 1569.


Arithmetica, Practica, y Speculatiua del Bachiller Ioan Perez de Moya.
AGORA NVEVAMENte corregida, y añadidas por el mismo author muchas cosas, con otros dos libros, y vna Tabla muy copiosa de las cosas mas notables de todo lo que en este libro se contiene.
CON PRIVILEGIO.
En Granada, en casa de Hugo de Mena, Año de 1590.

Pero también en lengua española tenemos algunos precedentes a la obra de Pérez de Moya, como el *Tratado subtilíssimo de Arismética y de Geometría* de Juan de Ortega que, si bien en su primera edición de 1512 no aparece ninguna referencia al álgebra, en la reedición corregida y aumentada por Gonzalo del Busto de 1552 se incluyen, a modo de apéndice y sin proporcionar ninguna justificación teórica, algunos problemas resueltos con métodos algebraicos. De mayor interés es el *Libro primero de Arithmética Algebrática* (1552) de Marco Aurel que aporta nociones teóricas inspirándose en la obra de Rudolff. También debe citarse el *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567) del portugués Pedro Nunes, la obra peninsular más valorada por la crítica especializada, que a pesar de ver la luz después del texto de Pérez de Moya su redacción es anterior, al menos esto es lo que se desprende de la lectura de su prólogo, donde el autor, explica que fue compuesta en portugués treinta años antes.

Si de los hechos se desprende que la *Arithmética práctica y especulativa* no goza del mérito de ser el manual más antiguo que trata el álgebra en lengua castellana, sí que puede afirmarse con rotundidad que fue el más conocido y apreciado de su época, y así lo atestiguan las numerosas reediciones que se hicieron durante la segunda mitad del siglo XVI y las dos centurias siguientes. El éxito se debió a varias virtudes del autor que hacen que el texto sea superior al resto de las obras de sus contemporáneos: su capacidad de síntesis de los conocimientos matemáticos conocidos hasta el momento, su claridad expositiva de las ideas presentadas y su concepción didáctica que incluye numerosos ejemplos que aclaran al lector los conceptos introducidos. Precisamente estas características, a nuestro juicio, hacen idónea esta obra para tomarla como texto de referencia en una introducción a la enseñanza del álgebra en el siglo XVI. Los fragmentos que se citan en este estudio han sido reproducidos fielmente de las ediciones del siglo XVI, y sólo nos hemos permitido modernizar la ortografía para facilitar su lectura, pero hemos mantenido en todo momento la sintaxis empleada por el autor, así como el peculiar léxico de la época.

La obra matemática del humanista Juan Pérez de Moya

Antes de continuar consideramos conveniente dar alguna breve noticia sobre el autor y la obra que comentaremos para situarla mejor en su contexto histórico. No se sabe demasiado sobre la vida del destacado humanista Juan Pérez de Moya, quizás porque fue una persona bastante solitaria y dedicada intensamente al estudio. Nació en 1513 en Santisteban del Puerto, un pequeño pueblo de Andalucía, y realizó sus estudios en Salamanca y en Alcalá de Henares, llegando a ordenarse sacerdote en 1536. Por sus notables conocimientos matemáticos, que alcanzó de un modo básicamente autodidacta, fue nombrado profesor de matemáticas en la Corte y en la Universidad de Salamanca. Desempeñó también diversos cargos religiosos, como el de canónigo de la catedral de Granada, que le fue otorgado seis años antes de su muerte en 1590.

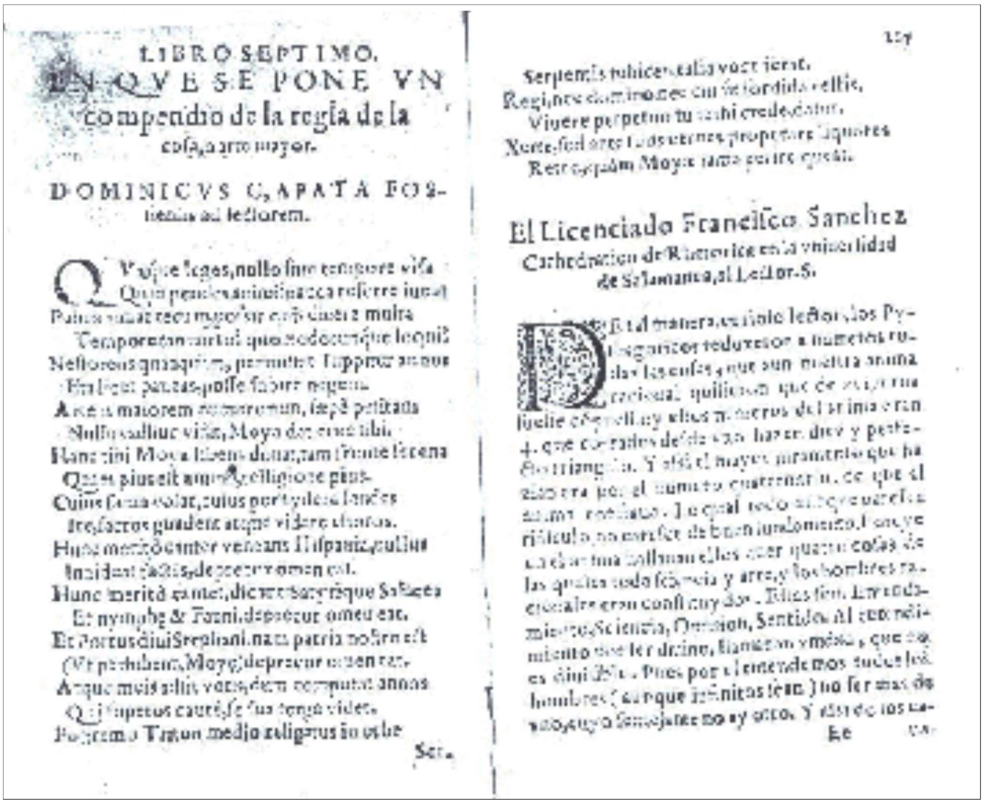
La obra de Pérez de Moya resulta de mayor interés que su biografía. La fama la alcanzó por su producción matemática, pero también fuera de este ámbito es conocido por diferentes obras filosóficas e históricas y, especialmente, por su *Philosophía secreta*: una obra que intenta recuperar las enseñanzas morales que encierran los relatos de la mitología clásica grecorromana, para que los lectores cristianos puedan leerlos con provecho para sus conciencias.

A Pérez de Moya se deben numerosos textos de carácter matemático, unos relativamente breves, tratando cuestiones concretas, y otros más extensos, sintéticos, que reunían y ampliaban lo publicado anteriormente por separado. El primero de estos manuales fue la *Arithmética práctica y especulativa* (1562) que le proporcionó gran fama y de la cual, como ya se ha dicho, se hicieron reediciones hasta finales del siglo XVIII. En él se utilizan, ya con total normalidad, los símbolos indo-arábicos al exponer los rudimentos del cálculo aritmético y los algoritmos de las operaciones, tanto referidos a números naturales como a quebrados; también se incluyen numerosos problemas aplicados a situaciones comerciales y a diversas actividades profesionales. Pero, además, este manual contiene dos capítulos de notable interés y que han atraído la atención de los especialistas. En uno se introduce el álgebra, y en otro se emplea la matemática recreativa en un famoso diálogo para defender, ante los detractores, el papel de la matemática en la sociedad. Al parecer, ambos capítulos habían sido publicados anteriormente por Pérez de Moya de un modo independiente, pero tuvo el gran acierto de incorporarlos a su *Arithmética*, haciendo de esta obra un libro novedoso, a la vez que didáctico y entretenido. Publicó también, Pérez de Moya, otras dos obras matemáticas extensas: unos *Fragmentos matemáticos* (1567-68) en dos volúmenes y un *Tratado de Matemáticas* (1573) en tres, que no llegaron a lograr el extraordinario éxito de su *Arithmética.* En ellos encontramos tratadas la aritmética y la geometría junto con otros saberes, como la astronomía o la cosmografía que, en la época, iban también asociados a la matemática.

Sobre la obra matemática de Pérez de Moya la crítica histórica ha afirmado, sin que le falte razón, que en ella no encontramos aportaciones teóricas de relevancia. Aunque también la misma crítica ha reconocido la extraordinaria habilidad de su autor para reunir y hacer accesibles al público interesado muchos de los avances que la matemática había alcanzado en su época. El mismo Simón Stevin, algunas décadas después de haber sido publicada su *Arithmética* por vez primera, alabó las cualidades didácticas del texto de álgebra.

La regla de la cosa

Para la mayoría de los autores europeos de libros de aritmética del siglo XVI, el álgebra todavía no constituía una rama de la matemática, era considerada (cuando la introducían en sus obras) como una simple regla o método para resolver un cierto tipo de problemas en los que la misma solución del problema se veía implicada en las operaciones que debían conducir a su resolución, por lo que los meros recursos de la aritmética resultaban insuficientes. Es cierto que en algunos textos se tiende a trascender esta limitación, como es el caso, en lengua española, del manual de Pedro Nunes (de ahí su alta valoración por la crítica), pero también lo es, que son textos generalmente menos accesibles a los lectores actuales.



LIBRO SEPTIMO. EN QVE SE PONE VN compendio de la regla de la cosa, o arte mayor.

DOMINICVS ÇAPATA FOR-tiensis ad lectorem.

[illegible]

Serpentis [illegible]

[illegible]

Reste [illegible] Moya [illegible]

El Licenciado Francisco Sanchez Cathedratico de Rhetorica en la vniversidad de Salamanca, al Lector. S.

De tal manera, [illegible]

Pérez de Moya se encuentra entre los primeros, pues con su exposición lo que abiertamente pretende es enseñar al lector una regla o método que le permita resolver toda una serie de cuestiones prácticas que planteará después. Pero también parece muy consciente del carácter general que se esconde bajo la apariencia de una mera *regla* y así parece deducirse de la breve introducción (Capítulo I) con la que da inicio al libro VII de su *Arithmética*, que es el dedicado al álgebra, y en la que justifica la denominación elegida para el nuevo recurso matemático:

> Diversos nombres tiene esta regla acerca de varios autores. Unos la llaman regla de álgebra, que quiere decir «restauratio» o «almucabala», que quiere decir oposición o absolución, porque por ella se hacen y absuelven infinitas cuestiones (y las que son imposibles nos las demuestra) así de aritmética como de geometría, como de las demás artes (que dicen) matemáticas. Otros la nombran regla de la cosa o del cos, porque obrando el nombre bien se le allega. Otros reglas reales o arte mayor. Llámese como cada uno quisiere, su fin no es otro que mostrar hallar algún número proporcional dudoso demandado.

Fijémonos en el eclecticismo de Pérez de Moya sobre esta cuestión conceptual (también lo vamos a apreciar más adelante en otras cuestiones). Así nos habla de *regla de álgebra*, reconociendo con ello, además de implícitamente su origen arábico, el carácter amplio que tiene el nuevo método ya que puede ser aplicado a cuestiones matemáticas de toda índole; también hace referencia a la denominación de *arte mayor*, para indicarnos que puede contemplarse como una generalización de la aritmética (que sería el arte menor); aunque él prefiere decantarse por utilizar en su manual el término de *arte de la cosa*, expresión que debía resultar más comprensible al lector de la época, pues de este modo remarcaba, por un lado, la novedad que representaba introducir y operar con valores variables, y por otro, recurriendo a la vida cotidiana, empleaba el término *cosa* que en lengua española se utiliza para indicar un objeto indeterminado.

La lectura de la *Arithmética práctica y especulativa* de Pérez de Moya puede sorprender a un lector moderno. Dejando aparte los aspectos lingüísticos que separan la lengua española actual de la del siglo XVI, apreciará este lector que el tratamiento de la materia es muy diferente al empleado en un texto de matemáticas actual, pues el peso que el rigor y la demostración tienen en los tiempos presentes no era igual cinco siglos atrás y menos aún en un texto dirigido a un público no especializado. Observaremos, eso sí, que las cuestiones tratadas están bien estructuradas en capítulos y artículos, pero éstos se componen de un conjunto de reglas que el autor va desgranando sin aparente ligazón, para aplicarlas posteriormente a los problemas, estas reglas no son demostradas estrictamente, se comprueba su validez a través de ejemplos y todo lo más se hace referencia a propiedades aritméticas semejantes tratadas en los capítulos de aritmética propiamente dichos. Aunque existen evidencias de que conoció y se inspiró en obras de autores contemporáneos, como Ortega y Marco Aurel, hay muy escasas referencias a autoridades, salvo el caso de las citas a los *Elementos* de Euclides.

La definición de los caracteres y la cuestión de la simbología

Desde el primer momento (Capítulo II), Pérez de Moya, plantea la cuestión clave en los inicios del álgebra: la definición y el uso de los conceptos básicos. A nadie se le escapa que un adecuado planteamiento de esta cuestión puede facilitar o complicar el posterior desarrollo de la materia. Autores como Pacioli y sus seguidores optan por emplear signos creados específicamente (algunos de ellos inspirados en el alifato) para designar la variable y cada una de sus potencias. Aunque Moya dice que estos signos son arbitrarios y cualquiera puede inventar los que considere mejor, para información de los lectores recoge la simbología utilizada por los autores de la escuela italiana.

> En este capítulo se ponen algunos caracteres dando a cada uno el nombre y valor que le conviene, los cuales son inventados por causa de brevedad, y es de saber que no es de necesidad que éstos y no otros hayan de ser, porque cada uno puede usar de los que quisiere e inventar muchos más. Los caracteres son estos:

Pero nuestro autor en seguida reconoce las dificultades que el empleo de esta simbología acarrea: al lector le supone aprender un conjunto de signos extraños al alfabeto y al impresor le acarrea unas importantes dificultades tipográficas. Por ello, él prefiere, siguiendo los pasos de Rudolff y de Marco Aurel, utilizar, para representar la variable y sus potencias, símbolos tomados del alfabeto latino y que, para más facilidad del estudiante, correspondan a las iniciales o a las abreviaturas de los términos que las designan.

Antes de llegar a los símbolos o abreviaturas empleadas por Pérez de Moya conviene exponer los elementos que los requieren. Para ello vamos a dejar que sea el mismo autor quien de detalle de los mismos:

> El primero quiere decir número... su valor es siempre conocido, como si dicen 4 reales, dirás claramente 4 reales.
>
> El segundo se dice cosa. Es raíz o lado de un número cuadrado, y éste es el primero de los números de una continua proporción. Su valor es variable, porque así como si habiendo de poner algunos números proporcionales puede el primero ser unas veces una cantidad y otras veces otra, así esta cosa no tendrá propio valor, antes tendrá el que le quisieses dar, así por enteros como por quebrados.
>
> El tercero se dice censo. Denota un número cuadrado, procede de la multiplicación de la cosa por sí misma. Como si pones por ejemplo que la cosa vale 2, el censo valdrá 4, y si la cosa vale 3, el censo valdrá 9, y así procederá en infinito. De lo cual se entiende ser la cosa raíz (cuadrada) del censo.
>
> El cuarto se dice cubo. Denota un número cúbico. Procede multiplicando el censo por la cosa, de suerte que si ponemos por ejemplo que la cosa vale 5, a este respecto el censo vale 25, y el cubo 125.
>
> El quinto quiere decir censo de censo, Denota un número que ha sido dos veces cuadrado, quiero decir que es un número del cual se podrá sacar dos veces raíz cuadrada, así como 16, que la primera raíz cuadrada es 4, y de 4 la segunda es 2. Procede de la multiplicación del censo por sí mismo o de la cosa por el cubo.
>
> El sexto se dice primer relato o sursolidum. Denota un número que no tiene raíz cuadrada ni cúbica, solamente tiene raíz relata, como se declara en el capítulo 3 (de la Aritmética). Procede de la multiplicación del valor de la cosa por el censo de censo, o el censo por el cubo. Como si la cosa valiese 2, el censo valdrá 4, el cubo 8, el censo de censo 16, el primer relato 32.
>
> El séptimo se dice censo y cubo. Denota un número cuadrado cubicado, o un cubo cuadrado, finalmente es un número del cual se puede sacar raíz cuadrada y de la cuadrada raíz cúbica, y al contrario. Así como 64, del cual la raíz cuadrada es 8, y de estos 8 la cúbica es 2, o de 64 la raíz cúbica es 4, y del 4 la cuadrada es 2. Procede multiplicando el valor de la cosa por el primer relato, o el censo por el censo de censo, o multiplicando el cubo por sí mismo, o cubicando el censo.
>
> El octavo se dice segundo relato o bissursolidum. Es un número de la propiedad que dijimos del sexto, porque no tiene raíz cuadrada ni cúbica. Procede multiplicando el valor de la cosa, por el censo y cubo, o el primer relato por censo, o censo de censo por cubo. Y si la cosa vale 2 el segundo relato valdrá 128.
>
> El noveno se dice censo de censo de censo. Denota un número tres veces cuadrado del cual se podrá sacar otras tantas veces la raíz cuadrada. Así como 256, de los cuales la primera raíz cuadrada es 16, la se-

gunda 4, y de estos 4 la tercera es 2. Procede multiplicando el valor de la cosa por el segundo relato, o el censo cubo por el censo, o el primer relato con cubo, o multiplicando el censo de censo por sí mismo.

El décimo se dice cubo de cubo. Denota un número dos veces cubicado, del cual se podrá sacar dos veces raíz cúbica. Así como 512, de los cuales la primera raíz cúbica es 8 y de 8 es dos. Procede multiplicando la cosa por el censo de censo de censo, o el segundo relato por el censo, o el censo y cubo por cubo, o el primer relato por censo de censo, o cubicando el cubo.

Del texto citado se desprenden algunos hechos de interés educativo. En primer lugar, a diferencia del modo de proceder actual en el que una vez establecido el concepto de variable las sucesivas potencias de la misma se introducen de un modo natural, pues el alumno ha trabajado ya en la aritmética la potencia como una operación que generaliza la multiplicación y conoce las propiedades del cálculo con potencias, este proceder no se encuentra en la aritmética de Pérez de Moya. En este autor, como en otros autores del siglo XVI, el interés está centrado en la operación inversa, es decir, la radicación, hecho que no debe extrañarnos ya que en sus textos prima el aspecto aplicado a la resolución de los problemas algebraicos, en los que al final del proceso de resolución se plantea casi siempre la extracción de una raíz. Conocían los algoritmos de la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, y también de las que resultaban aplicación sucesiva de estas dos, como la cuarta, la sexta, la octava o la novena, pero ignoraban como obtener la raíz quinta, séptima, etc. De ahí que, una vez definida la variable (cosa) se hiciera especial hincapié en su cuadrado (*censo*) y en su cubo (*cubo*), las potencias cuarta, sexta, octava y novena las denominan a partir de las dos básicas: *censo de censo, censo y cubo, censo de censo de censo y cubo de cubo*. Las potencias quinta y séptima que implican raíces, en principio no extraíbles, adquieren una denominación especial y correlativa: *primer relato y segundo relato*.

Otro aspecto a comentar es que, nuestro autor, en su relación de caracteres sólo alcanza a presentar hasta la potencia novena de la variable (*cubo de cubo*), pero no porque ignore que puede proseguirse indefinidamente, como bien aclarará más adelante, sino porque, como otros autores de su época, no cree necesario utilizar potencias de mayor exponente en la resolución de los problemas algebraicos habituales de la vida cotidiana.

Finalmente querríamos señalar la insistencia, por parte de Pérez de Moya, en utilizar el concepto de proporción en todas estas definiciones y en otros lugares del texto, mucho más de lo usual que en los manuales de álgebra modernos. Esta insistencia, en nuestra opinión, es una reminiscencia de la visión medieval de la enseñanza de la aritmética, en la que el estudio de las proporciones entre los números constituye un objetivo esencial.

Nota que el carácter, cualquiera que sea, no se ha de tomar por cantidad simple, sino por grado de una continua proporción, de los cuales el primer grado es la cosa, el segundo el censo, el tercero el cubo, el censo de censo el cuarto, y el primer relato es el quinto, y así de los demás.

Aunque Pérez de Moya utiliza preferentemente, en los ejemplos que presenta, los números naturales, advierte, desde el principio, que todos caracteres que menciona son también aplicables a números fraccionarios:

Nota. Así como se presupone que una cosa valga 2, o 3 ó más, puede decir que valga medio, y a este respecto el censo valdrá un cuarto y el cubo un octavo; y así les darás otros cualesquiera valores que te agradaren, así por enteros como por rotos (quebrados).

Como símbolos para representar abreviadamente los caracteres en los cálculos algebraicos propone los siguientes: *n.* para número, *co.* para cosa, *ce.* para censo, *cu.* para cubo, *cce.* para censo de censo, *R.* para primer relato, *cecu.* para censo y cubo, *RR.* para segundo relato, *ccce.* para censo de censo de censo y *ccu.* para cubo de cubo. Para indicación de las operaciones utiliza: *p.* (plus) para más, *m.* (minus) para menos, *yg.* para igual.

Todavía tenían que transcurrir algunas décadas para que Vieta (1540-1603) y otros matemáticos introdujeran el sistema de símbolos que aún utilizamos en la actualidad y que permitió al álgebra dar un salto cualitativo que la colocó entre las ramas más vigorosas de la matemática.

Los números cuadrados y la extracción de raíces cuadradas

Una vez definidos los que Pérez de Moya denomina *caracteres* y lo que nosotros podríamos llamar la variable y sus potencias, pasa a tratar con detalle los casos de la potencia segunda y tercera y la extracción de las raíces también segunda y tercera (Capítulos III y IV).

> Número cuadrado es (según define Euclides) un número superficial de iguales lados. Quiero decir que procede de la multiplicación de dos números iguales en cantidad y género, como 5 y 5, multiplicados el uno por el otro hacen 25; este 25 se dice número cuadrado y el 5 raíz cuadrada. Y la proporción que hay de la unidad a la raíz de cualquier número, la misma habrá de la raíz a su cuadrado, de donde se infiere que buscar la raíz cuadrada de un número no es otra cosa sino buscar una cantidad media proporcional entre la unidad y el tal número propuesto.
>
> Nota que todo número podrá ser raíz de otro y no todo número tendrá raíz cuadrada perfecta.

caracteres Pérez de Moya	notación P. M.	notación actual
número	n.	n
cosa	co.	x
censo	ce.	x2
cubo	cu.	x3
censo de censo	cce.	x4
primer relato	R.	x5
censo y cubo	cecu.	x6
segundo relato	RR.	x7
censo de censo de censo	ccce.	x8
cubo de cubo	ccu.	x9

> Acerca de lo cual es de saber que los números cuadrados son de dos modos: racionales e irracionales. Número racional es un número que tiene raíz discreta, quiero decir justa, así como 4, 9, 16, que sus raíces son 2, 3, 4. Números irracionales son unos números que no tienen raíz discreta, como el 10 y otros semejantes; de estos números jamás por práctica se podrá dar su raíz discreta, si no fuese por vía de línea, como se prueba por la novena proposición del texto de Euclides.

De nuevo podemos detectar en el fragmento reproducido algunas reminiscencias del enfoque medieval de la enseñanza de la aritmética, tales como la referencia a la concepción geométrica de número cuadrado, a la construcción también geométrica de la raíz cuadrada de un segmento o a las relaciones de proporcionalidad existentes entre los elementos definidos. Advertiremos que la proposición de Euclides en la que se hace referencia a la obtención de un segmento como media proporcional de otros dos, y que constituye el fundamento para determinar geométricamente la raíz cuadrada de un segmento, es la número 13 del libro VI de los *Elementos*. En esta misma línea de recuperar antiguos hallazgos de la matemática griega se encuentra la mención que Pérez de Moya hace de la propiedad que vincula cuadrados perfectos con números impares consecutivos:

> Nota. Tantas cuantas unidades tuviere la raíz de un número cuadrado, de tantos números impares (comenzando por la unidad) será compuesto el tal número cuadrado. Ejemplo. La raíz de 25 es 5, pues de cinco números impares será compuesto el 25, así como 1, 3, 5, 7, 9 todos juntos hacen 25.

Para extraer raíces cuadradas de un número entero del tipo *racional*, es decir, cuadrado perfecto, Pérez de Moya propone dos posibles algoritmos, que no son más que dos variantes del que todavía hoy aparece en los textos escolares, salvo por algunas diferencias formales que afectan a la disposición de las cifras, pero no a la esencia del proceso.

Pero calcular la raíz cuadrada de los por él denominados *números irracionales* resultaba ser una tarea no tan fácil si tenemos en cuenta un hecho que conviene subrayar para mostrar una limitación común a todos los autores del momento. Las fracciones decimales eran ya conocidas por los matemáticos árabes y, en consecuencia, también por los de la Europa renacentista, pero hasta que Simón Stevin no publicó su famosa obra *De Thiende* en 1585 no aparecieron el concepto y la notación de número decimal como ahora los conocemos. Por lo tanto, en la época en la que se sitúa la obra que analizamos (mediados del siglo XVI) todavía no se había introducido este recurso y todos los cálculos debían realizarse exclusivamente con números enteros y fracciones.

¿Cómo se podía aproximar la raíz de un número no cuadrado perfecto sin contar con la ayuda de los números decimales? Para resolver esta cuestión nuestro autor propone tres métodos que permiten obtener aproximaciones de la raíz. Por el interés didáctico de la cuestión vamos a comentarlos con algún detalle.

El primero de los métodos es el más sencillo de aplicar, pero también el que proporciona la aproximación más grosera:

> Cuando habiendo sacado raíz de algún número sobrare algo, pondrás lo que sobrare sobre una raya y doblarás la raíz de tal número y añádele uno, y ponerlo has debajo por denominación. Ejemplo. La raíz de 27 es cinco y sobran dos, pon los dos que sobran sobre una raya y dobla los 5 que vinieron por raíz y añádeles uno, y serán 11, los cuales pondrás debajo de los 2, y así dirás que la raíz cuadrada imperfecta o irracional de 27 es 5 y dos oncenos. Nota que no puede sobrar tanto como el duplo de la raíz y más uno, la razón de ello pone Euclides en la octava (proposición) del (libro) noveno.

No cabe duda de que este método proporciona una solución muy tosca al problema, pues basta con compararla con la obtenida utilizando los números decimales. Pero para valorar este método con justicia, hay que situarse en la época de Pérez de Moya y ante un artesano que necesita determinar la raíz de un número no cuadrado perfecto para conocer el valor de una medida, y que dispone, para luego aplicarla, de instrumentos en los que sólo aparecen marcados números enteros; en este caso, esta regla le proporciona una fracción propia que le ayuda a estimar la situación de la medida entre dos posiciones o marcas que corresponden a dos valores enteros consecutivos.

El segundo método que expone Pérez de Moya es más preciso que el anterior, aunque también más laborioso, se basa en una serie de aproximaciones sucesivas de corto y largo, que las explica a través de un ejemplo:

> Para declaración de este orden de aproximar se ha de presuponer que hay dos maneras de progresiones, la una por aumentación, así como medio, dos tercios, tres cuartos, cuatro quintos, etc. La otra por disminución, así como medio, un tercio, un cuarto, un quinto, etc. Entendido esto, pon por caso que quieres sacar la raíz de 5, lo cual si dices ser 2 es poco y si dices ser 3 es mucho. Pues porque 2 es poco y 3 es mucho suma 2 y 3 y serán 5, de cual tomarás la mitad, que es dos y medio, si los multiplicas por si montan 6 y un cuarto, que es uno y un cuarto más de lo que quisieras; pues por tanto tomarás un tercio, procediendo con la progresión de la disminución, y juntarlo has con el 2, y serán dos y un tercio, los cuales multiplicados por si serán 5 y cuatro novenos, que es cuatro novenos más que 5. Pues ahora hay necesidad de juntar con los 2 y un cuarto, y serán dos y un cuarto, multiplicado por si es 5 y un 16avo. Pues es mucho todavía 2 y un cuarto, pon dos y un quinto, y montará su cuadrado 4 y 21 veinticincoavos, pues por cuanto un cuarto es mucho y un quinto es poco, es menester tomar un intermedio entre un cuarto y un quinto, lo cual se hará sumando los numeradores llanamente uno por otro y denominadores con denominadores, y montarán 2 novenos, lo cual es menos que un cuarto y más que un quinto. Junta estos dos novenos con los dos enteros y serán 2 y dos novenos, que cuadrados es 4 y 76 ochenta y un avos; y porque es menos que 5 conviene hallar otro intermedio entre un cuarto y dos novenos de la manera que hemos dicho, y serán 2 treceavos, que su cuadrado es 4 y 108 ciento sesenta y nueve avos. Y de esta manera procederás hasta que llegues o pases casi al punto; mas a perfección no llegarás.

Este método de aproximaciones sucesivas para determinar la raíz de un número, que admite diversas variantes de procedimiento, era conocido desde la antigüedad, ya que se tienen noticias de su utilización por los sumerios, también fue utilizado por autores contemporáneos de Pérez de Moya, como el francés Chuquet (c1450-c1500), y años más tarde fue generalizado por Newton (1642-1727).

En el tercer método que propone, Pérez de Moya da un paso más hacia la consecución de mejores aproximaciones en la determinación de raíces cuadradas.

> Pon que quieres sacar la raíz de 40, y porque de 40 no se puede sacar raíz discreta multiplicarás 100 por sí y serán 10000, los cuales se multiplicarán por los 40 y montarán 400000. Saca la raíz cuadrada, que es 632, estos 632 son centésimos, que valen 6 enteros y 32 centésimos... Nota que lo que aquí vino fueron centésimos por razón que multiplicaste por 100, mas si multiplicas por 10 serán décimos y si por 1000 serán milésimos, y así de otras partes.

Observemos que al hacer uso de las fracciones decimales propone un método próximo al que se impondría años después con la introducción de los números y la notación decimales. Con ello demuestra estar al corriente de los conocimientos matemáticos más avanzados y corrobora la justa fama de sintetizador del saber matemático de su época.

Tras analizar las operaciones básicas que pueden realizarse con raíces cuadradas pasa nuestro autor a considerar la extracción de raíces cúbicas de números enteros (Capítulos V y VI). Sigue el mismo esquema programático que al tratar las cuadradas describiendo primero el algoritmo usual, para pasar después a proponer algunas aproximaciones cuando los radicandos no son cubos exactos.

La cuestión de obtener raíces de orden superior al tres es tomada en consideración para los casos de raíces cuarta, sexta, octava y novena, al ser posible extraerlas aplicando sucesivamente los algoritmos de la segunda y/o la tercera. Los casos de las raíces quinta y séptima no son considerados ni se proporciona método aproximado alguno.

Adición y sustracción de caracteres

El capítulo VIII está dedicado a tratar las operaciones básicas con caracteres. En primer lugar, el autor, nos previene que no es posible operar con ellos como si fueran simples números, salvo cuando son de la misma especie:

> Como los caracteres no sean otra cosa sino unos cantidades proporcionales inciertas, o (por mejor decir) variables, pues se varían según el valor de la cosa (como por el capítulo II mejor se puede entender), no podríamos sumar unos con otros llanamente, como se hace en cosas de una especie, sin reducir si no es con la dicción del más. Porque así como si quisiésemos sumar 2 reales con 4 ducados no dirás que montan 6 reales, ni 6 ducados, puédese responder muy bien sin reducir uno ni otro diciendo que monta 2 reales más 4 ducados, o 4 ducados más 2 reales, y esto por causa del valor de los reales es diferente del ducado. Pues semejantemente te has de ver en estos caracteres, que si quisieres sumar unos diferentes con otros, como 2co., con 2ce., dirás que monta 2co. p 2ce. ó 2ce. p 2co. Mas si los caracteres que hubieses de sumar fueran de una especie, en tal caso llanamente sumarás lo uno con lo otro; como si dicen: suma 5co. con 3co., porque la una y otras cantidad son co. sumarás 5 con 3 y montarán 8, los cuales dirás ser cosas.

A continuación explica el modo de proceder cuando se presenta la operación de adición de las *partidas compuestas de p. y m.*, lo que nosotros denominamos polinomios:

> Si quisieres sumar dos o más partidas compuestas de p. y m., siempre sumarás cosas semejantes con otras, así como cu. con cu., ce. con ce., R. con R.; y el carácter o caracteres que no tuvieren otro semejante con quien poderse sumar asentarse han como estuvieren, poniéndoles la señal de p. o m. que trajeren.
>
> Nota. Cuando sumares p. con p. sumarás y pondrás p., y sumar m. con m. sumarás y pondrás m. Sumando p. con m., ó m. con p., restarás la menor cantidad de la mayor, y pondrás el carácter de p. ó m. que viniere con la mayor cantidad; y si fueren iguales las cantidades no pondrás nada.

Propone inmediatamente un ejemplo aclaratorio de las reglas que acaba de introducir. Lo reproducimos íntegramente para mostrar por qué los textos de Pérez de Moya estaban tan bien valorados por el público interesado en el aprendizaje de la matemática práctica, pues pormenoriza muy detalladamente los pasos que debe seguir el estudiante para determinar la suma de los dos polinomios propuestos.

> Y porque esto sea bien entendido, pon por ejemplo que piden que sumes 9R. p. 5cc. m. 9cu. m. 3ce. p. 8co. m. 6n. y por otra parte 7R. p. 4cce. m. 7cu. p. 5ce. m. 9co. p. 6n. Pon estas dos partidas en figura, asentando n. enfrente de n. y ce. enfrente ce., y así en los demás caracteres, y comienza a sumar de la parte que quisieres, no se me da más de la mano diestra que de la siniestra. Pues comienza de las figuras que están a la siniestra, que son 9R. y 7R., y sumarse han juntado 9 con 7 y serán 16, los cuales pondrás debajo de la raya enfrente de las figuras mismas, poniendo delante el carácter que tienen, que es R. Y así pasamos a sumar los censos de censos, diciendo: 5 y 4 hacen 9, pon 9, y porque sumas p. con p. pondrás p. antes de los 9 y adelante cce. porque lo que sumas son censos de censos. Prosigue pasando a sumar los cu., como son por una parte m. 9cu. y por otra m. 7cu., pues sumando m. con m. suma y pon m., y serán 16cu. Y así pasarás a sumar los censos, y hallarás que hay en la partida de arriba m. 3ce. y en la de abajo p. 5ce., y porque dice la regla que sumando p. con m. ó m. con p. (que es lo mismo) se ha de restar la menor cantidad de la mayor y poner el p. ó el m. que estuviere con la misma mayor, resta los 3 de los 5 y quedarán 2ce., y pon p. porque es la figura que trae la mayor cantidad; y así dirás que sumando m. 3ce. con p. 5ce. monta p. 2ce., porque de los 5 se sacan los 3 que estaban m. arriba. Prosigue sumando p. 8co. con m. 9co. como hiciste en los ce., restando los 8 de los 9, y quedará una cosa, a la cual le pondrás m. porque está con la parte mayor; y así dirás que sumando m. 9co. con p. 8co. monta m. 1co. Pasa a los números y resta los m. 6 de los p. 6 como manda la regla, y porque no queda nada o porque las cantidades son iguales no pongas nada.

Al principio, el autor, para ayudar al lector poco habituado a este recurso, evita las expresiones simbólicas y prefiere utilizar las palabras con las menos abreviaturas posibles, pero después, y a manera de resumen, acaba por utilizarlas.

Y así habrás dado fin a tu suma y quedará como parece figurado:

9R. p. 5cce. m. 9cu. m. 3ce. p. 8co. m. 6n.

7R. p. 4cce. m. 7cu. p. 5ce. m. 9co. p. 6n.

16R. p. 9cce. m. 16cu. p. 2ce. m. 1co.

Nosotros escribiríamos:

$$9x^5+5x^4-9x^3-3x^2+8x-6$$

$$7x^5+4x^4-7x^3+5x^2-9x+6$$

$$16x^5+9x^4-16x^3+2x^2-1x$$

Un hecho muy característico de la obra es la presencia de numerosas notas, a través de las cuales el autor va introduciendo matizaciones, aclaraciones o generalizaciones de las cuestiones expuestas. Veamos un par de ejemplos referidos a la adición:

Nota. Las primeras figuras de la mano siniestra, aunque no tengan señal de p., como no tengan la de menos, siempre entenderás ser p.

Nota. Así como sumaste 2 partidas sumarás 3 o cuantas más quisieres, teniendo aviso de juntar las partidas de los mases a una parte y de los menos a otra.

A la sustracción de caracteres le dedica menos espacio, pues su mecánica resulta fácil de entender al estudiante que había llegado hasta ese punto. De este modo expone las reglas básicas a seguir:

Restando p. de p., si la cantidad de arriba fuere mayor que la de abajo restarás y pondrás p. Restando m. de m., si la cantidad de arriba fuere mayor que la de abajo restarás y pondrás m. Restando p. de p. si la cantidad de abajo fuere mayor que la de arriba restarás la menor de la mayor y pondrás m. Restando m. de m. si la cantidad de abajo fuere mayor que la de arriba restarás la una de la otra y a lo que quedare pondrás p. Y de cualquier manera que sea, si las cantidades fueran iguales no pondrás nada. Restando p. de m., ó al contario, m. de p., sumarás y a la tal suma pondrás la señal de arriba, ya sea p., ya sea m., comoquiera que fuere, la que estuviere alta pondrás.

Y las acompaña de un ejemplo sin detallar los pasos, pero incluyendo la expresión simbólica porque considera que proporciona suficiente información sobre el proceso:

Entendidos estos preceptos, pon por ejemplo que quieres restar 5ccce. p. 3RR. m. 4 cecu. p. 7R. m. 10cce. m. 1cu. p. 3ce. de 7ccce. p. 3RR. m. 6cecu. p. 3R. m. 9cce. p. 7cu. m. 6ce. Pon las partidas la una debajo de la otra, poniendo la que quieres restar debajo de la otra de donde se hubiera de restar, y siguiendo la orden de las reglas de estos preceptos de restar hallarás que restan 2ccce. m. 2cecu. m. 4R. p. 1cce. p. 8cu. m. 9ce., como aparece figurado:

7ccce. p. 3RR. m. 6cecu. p. 3R. m. 9cce. p. 7cu. m. 6ce.

5ccce. p. 3RR. m. 4cecu. p. 7R. m. 10cce. m. 1cu. p. 3ce.

2ccce. m. 2cecu. m. 4R. p. 1cce. p. 8cu. m. 9ce.

Utilizando la notación actual tendríamos:

$$\begin{array}{l} 7x^8 + 3x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 7x^3 - 6x^2 \\ 5x^8 + 3x^7 - 4x^6 + 7x^5 - 10x^4 - 1x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^8 \qquad - 2x^6 - 4x^5 + 1x^4 + 8x^3 - 9x^2 \end{array}$$

Multiplicación y división de caracteres

Para la multiplicación de *partidas compuestas de caracteres,* Pérez de Moya nos advierte de la existencia de tres reglas fundamentales, la primera referida al producto de p. y m., la segunda al resultado de multiplicar los caracteres entre sí y la última de la necesidad de multiplicar cada carácter del multiplicando por cada uno de los caracteres del multiplicador:

> En esta regla se han de tener cuenta con tres cosas. La primera con las dos dicciones del p. y m. La segunda saber qué carácter resulta multiplicando co. por ce. o otros cualquiera caracteres. Lo tercero tener aviso de multiplicar las cantidades que vinieren con los caracteres unas por otras.

La primera de las reglas, la que hoy conocemos como *regla de los signos*, la expone sin aportar ningún tipo de justificación ni referencia.

> En cuanto a lo primero tendrás por regla general que multiplicando p. por p. ó m. por m. monta p., y multiplicando p. por m. ó m. por p. monta m.

Hay un hecho importante a destacar de la segunda regla, la referida al resultado de multiplicar los caracteres entre sí. Propone Pérez de Moya una tabla en la que, sobre los caracteres presentados según el orden con el que fueron introducidos inicialmente, se colocan las diez cifras consecutivas, de modo que coinciden exactamente con los exponentes que nosotros situamos sobre la variable x; de este modo se obtiene una regla muy semejante a la utilizada cuando queremos multiplicar potencias de igual base, lo que constituye, sin duda, una notable intuición de las ventajas que iba a aportar la nueva notación, entonces próxima a inventarse.

> Para lo segundo se tendrá en cuenta con la tabla siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n.	co.	ce.	cu.	cce.	R.	cecu.	RR.	ccce.	ccu.

> De esta figura has de notar que cuando multiplicares en cualquiera de estos caracteres por otro sumarás los números que los tales caracteres tuvieren sobre sí, y lo que montare mira sobre que carácter está otro tanto, porque aquel tal carácter será el producto de los dos multiplicandos.
>
> Ejemplo. ¿Multiplicando ce. por cu. qué carácter hará? Suma los 2 que tiene el ce. sobre sí con los 3 del cu. y serán 5, mira que carácter hay que tenga 5 encima de sí y hallarás que el R.; pues así dirás que multiplicando ce. por cu. hace R .

Siguen numerosos ejemplos y una comprobación de la veracidad de la regla recordando la proporcionalidad de los caracteres:

> Y porque esto es una cosa muy importante, para que mejor sea entendido se ha de tener en la memoria lo que dije en el segundo capítulo, en el cual se trató cómo estos caracteres denotan cantidades proporcionales, según el valor le quisieres dar a la co. Pues pon por ejemplo que la co. valiese 2; a este respecto la ce. valdrá 4, porque se engendra de la multiplicación de la co. por sí misma, y el cu. valdrá 8, y el cce. 16, y el R. 32, y el cecu. 64, y el RR. 128, y el ccce. 256, y el ccu. 512. Ahora podrás probar si es verdad que

multiplicando ce. por cu. hace R., de esta suerte: el valor del ce. es 4 y el de cu. 8, pues multiplicando 4 por 8 hacen 32, que es la suma del R.

La tercera regla la explica practicándola en diversos ejemplos que describe con detalle.

«Entendidas estas dos reglas, la tercera se entenderá en la práctica de los ejemplos siguientes. Pon por caso que quieres multiplicar 7ce. por 4co.. Multiplica los 7 por los 4 y serán 28, multiplica ahora los caracteres diciendo: ce. multiplicado por co. monta cu., como por la tablilla puede verse. Y así dirás que multiplicando 7ce. por 4co. monta 28cu**.**

Otro ejemplo. Multiplica 4cu. m. 2co. por 3co. m 5n. Pon la multiplicación y multiplicador en figura, como parece:

4cu. m. 2co.

3co. m. 5n.

Y multiplica con cada carácter de los de abajo todos los de arriba, diciendo: m. 5n. multiplicados por m. 2co. montan p. 10co.; la razón de esto es porque multiplicando n. por co. monta co. y multiplicando 5 por 2 monta 10, y multiplicando m. por m. monta p. (como se dijo en la primera cosa de las tres que se habían de tener en cuenta en esta regla). Y así pasarás adelante multiplicando los 4cu. por los m. 5n. y montará m. 20cu., porque multiplicando 4 por 5 montan 20, y multiplicando n. por cu. monta cu., y multiplicando m. por p. es m.

Ya que con los m. 5n. se ha multiplicado todo lo de arriba, toma las 3co. y multiplica de nuevo todo lo de arriba, diciendo: 3co. multiplicadas por m. 2co., que están arriba, montan m. 6ce., porque co. multiplicado por co. monta ce., y 3 multiplicados por 2 montan 6 y p. multiplicado por m. monta m. Y si aquí dudare alguno a donde está el p. pues están las 3co. solas, a esto se responde que las figuras que no estuvieren señaladas por la dicción del m. siempre se entiende p. aunque no se ponga. Prosigue multiplicando con las 3co. los 4cu. de arriba y montará 12cce., porque cu. multiplicado por co. hace cce. y 4 multiplicado por 3 monta 12. Y así habrás dado fin a tu multiplicación, y no faltará sino sumar lo que estuviere entre las rayas, guardando lo que dice la regla del sumar caracteres, artículo primero de este octavo capítulo, y montará 12 cce. m. 20cu. m. 6ce. p. 10co., como aparece figurado:

4cu. m. 2co.

3co. m. 5n.

---

m. 20 cu. p. 10co.

12cce. m. 6ce.

---

12 cce. m. 20cu. m. 6ce. p. 10co.

Nosotros escribiríamos el siguiente desarrollo para este ejemplo:

$4\,x^3 - 2\,x$

$3\,x\ \ - 5$

$- 20\,x^3 + 10\,x$

$12\,x^4 - \ 6\,x^2$

$12\,x^4 - 20\,x^3 - \ 6\,x^2\ \ + 10\,x$

Para la división de *partidas compuestas de caracteres* Pérez de Moya sigue el mismo esquema programático que en las operaciones anteriores: explica las reglas básicas y las aplica repetidas veces en los ejemplos que propone. Para enseñar el modo de dividir caracteres por caracteres hace uso de la misma tabla que utilizó en el apartado anterior con ocasión de tratar la multiplicación de caracteres.

> Para partir caracteres hay necesidad de traer a la memoria la tablilla que se puso en el artículo precedente del multiplicar, porque así como para multiplicar dijimos que se habían de sumar los números puestos arriba de los caracteres que multiplicares, en esta regla se ha de restar, como se entenderá por los ejemplos siguientes.
>
> Pon por caso que quieres partir cu. por co., mira en la tabla del artículo arriba allegado cuanto tiene sobre sí el cu., que es el carácter que quieres partir, y hallarás tener 3; asimismo mira cuanto tiene la co., que es el partidor, y hallarás tener 1. Pues resta este 1 del partidor de los 3 de la partición y quedará 2; mira sobre que carácter hay 2 y hallarlo has sobre el ce. Pues este ce. es el cociente, y así dirás que partiendo cu. por co. viene ce.

Tras explicar minuciosamente varios casos de división de un carácter por otro pasa a considerar la situación de dividir una *partida compuesta de caracteres* por un sólo carácter, es decir, lo que denominaríamos división de un polinomio por un monomio.

> Ejemplo. Parte 16cce. m. 7cu. m. 8ce. por 8ce. Pon la partición y partidor de la suerte que parece:
>
> 16cce. m. 7cu. m. 8ce.
>
> ____________________
>
> 8ce.
>
> Y hallarás que partiendo 16cce. a 8ce. salen a 2ce., porque 16 partidos a 8 caben 2, y cce. partido por ce. viene ce. (como siguiendo la orden de la tablilla podrás ver). Prosigue partiendo los m. 7cu. por 8ce., que es el partidor, pues partiendo 7 a 8 caben 7 octavos, asimismo partiendo cu. por ce. viene co., y porque los 7 que partes es m., por tanto lo que cupo también será m., por la regla que dice: partiendo m. por p. es m.; y así dirás que partiendo m. 7cu. por 8ce. vienen 7 octavos cosa. Prosigue partiendo los m. 8c. que están en la partición por los 8 del partidor, diciendo 8 partido por 8 caben 1, y porque es m. a este 1 le pondrás m., asimismo partiendo ce, por ce. viene n; luego partiendo m. 8ce. por 8ce. cabe m. 1n. Y así habrás dado fin a tu partición, y responderás que partiendo 16 censos de censos menos 7 cubos menos 8 censos por 8 censos cabe a 2 censos menos 7 octavos de una cosa menos un número.

En una nota aparte comenta el caso especial que se presenta cuando el grado del carácter divisor es mayor que el del dividendo, en esta situación aconseja dejar la operación indicada bajo la forma de una fracción:

> Nota. Si el carácter del partidor fuere mayor que el de la partición, en tal caso pondrás el partidor debajo de la partición y quedara como quebrado.

Idéntica solución propone en la división de dos *partidas compuestas*, en la que el divisor tiene más de un elemento:

> Lo mismo has de hacer todas las veces que el partidor trajere más de un carácter. Como si dijesen: parte 50cu. por 3co. p. 4ce. Pon el partidor debajo de la partición de esta suerte que parece, con su raya por medio como quebrado:
>
> 50cu.
>
> _______
>
> 3co. p. 4ce.
>
> y haciéndolo así bastará para lo que por ello se pretende.

Esta limitación, de no plantear de un modo más general la división de polinomios, pretende aligerar al máximo la cantidad de reglas que el estudiante debe aprender. No parece ser resultado de un desconocimiento por parte del autor, pues en un breve comentario, al final del capítulo, explica que la división por un divisor constituido por un carácter de grado superior al del dividendo, puede presentarse bajo una expresión más sencilla a la vista simplificando ambos términos, aunque inmediatamente, como si se arrepintiera de haberlo escrito, dice que esta cuestión puede ignorarse por no ser imprescindible en la resolución práctica de los problemas.

> Cuando no pudieses partir alguna partición por razón de ser mayor carácter el del partidor que el de la partición, podrás abreviar la cantidad y caracteres del partidor y de la partición proporcionadamente, de la suerte que en este ejemplo se hará.
>
> Pon por caso que quieres partir 16ce. por 8cu. Pues porque cu. es mayor carácter que ce., pondrás los cu., que es el partidor, debajo de los 16ce. con una raya en medio, como quebrado. Abrevia ahora las cantidades y caracteres (como se mostró en el capítulo segundo) y vendrá a ponerse sobre la raya 2n. y debajo 1co. No me detengo en esto porque importa tan poco para nuestro propósito que se puede dejar de saber.

Tras la división sigue un breve artículo dedicado a la extracción de raíces cuadradas de caracteres, en el que se limita a enunciar la regla que hoy denominamos del cuadrado de un binomio y a aplicarla en algunos ejemplos.

> Queriendo sacar raíz (cuadrada) de algún trinomio, así como 9cce. p. 12cu. p. 4ce. ($9x^4 + 12x^3 + 4x^2$), sacarás la raíz de los extremos, y si la multiplicación de las raíces de los dos extremos hiciere tanto como la mitad del carácter de en medio de los tres que quisieras sacar raíz, el tal trinomio tendrá raíz, y tal raíz es la misma raíz de los extremos. En el ejemplo la raíz buscada será 3ce. p. 2co. ($3x^2 + 2x$).

El capítulo dedicado a las operaciones con caracteres concluye comentando muy brevemente el modo de comprobar, una vez realizada una operación, si el resultado es correcto.

> Las pruebas de estas cuatro reglas (operaciones) precedentes sean las que dicen reales; quiero decir que el sumar de caracteres lo pruebes con el restar, y al contrario, el restar con el sumar, y el multiplicar con el partir y el partir con el multiplicar. Aunque mejor se prueba poniendo valor a los caracteres, como está dicho.

Las igualaciones

Tras todo lo expuesto hasta este momento, Pérez de Moya considera que el lector está ya preparado para resolver *demandas* (problemas) en las que se requiere utilizar recursos algebraicos y, por lo tanto, aborda la cuestión previa, pero esencial, del concepto de *igualación* (ecuación) y sus propiedades (capítulo X).

> Habiendo puesto lo que me ha parecido ser necesario para operación de esta regla de cosa, resta mostrar y declarar la orden que se ha de tener para saber hacer y proponer las demandas que por ella quisieres absolver (resolver). Y así digo que para hacer cualquier demanda por esta regla has de presuponer que tal demanda es ya hecha y respondida y que la quieres probar, poniendo por ejemplo que la respuesta fuese una cosa, con la cual procederás haciendo lo que la demanda pidiere, y lo que te viniere con la 1co. dirás ser igual a lo que quisieras que viniera.
>
> De esto se sigue ser necesarias dos partes en estas igualaciones, la una la que viniere con la operación de la co. (según lo que la demanda pide), y la otra lo que quisieras que viniera; de estas dos partes la una ha de ser semejante a la otra en calidad, o, por mejor decir, en proporción.
>
> Como si dijeses: dame dos números en proporción tripla que sumados hagan 36. Para hacer ésta presupondrás que el un número es una cosa (que se figura así: 1co.), el segundo, porque dice que ha de ser tripla proporción, será 3co., los cuales dos números sumados montarán 4co. Estas 4 cosas dirás que es igual a los 36 números que quisieras que vinieran... Decir que 4co. son iguales a 36 números no es otro que 4co. valen 36 números, que partidos 36 a 4 viene 9, y éste es el valor de una cosa.

Puede resultar de interés al lector moderno la discusión que el autor lleva a cabo sobre las condiciones de solubilidad de las igualaciones, que él presenta bajo la forma habitual de *nota*:

> Nota. Estas dos partes de que se hace la igualación algunas veces son semejantes en caracteres y en número, así como si 6cu. se igualasen a 6cu., 2co. a 2co., etc., en tal caso el valor de la cosa o respuesta de la demanda será uno; mas si fuesen semejante en caracteres y diferentes en número, como si 3co. se igualasen a 4co., ó 5R. a 2R., en tal caso las demandas que semejantes igualaciones te diesen serán imposibles, y no se podrán hacer porque dos reales no pueden ser tanto como tres, siendo todos de un valor.
>
> Otras veces son semejantes en número y disímiles en caracteres, como si 8co. se igualasen a 8ce. ó 10co. a 10n.; esto es señal que la tal demanda tiene infinitas respuestas y no tiene una sola.
>
> Otras veces son disímiles en número y caracteres, como si 5co. se igualasen a 8ce. ó 12cce. a 15cu.; ésta es señal de tener una sola absolución.

La segunda parte del capítulo está dedicada a mostrar todo un conjunto de reglas que permiten la operatividad en las igualaciones y que son imprescindibles en los procesos de resolución. Estas reglas al igual que las diversas notas que las acompañan derivan de las propiedades que han sido expuestas, páginas atrás, en capítulos y artículos anteriores, que son siempre oportunamente citados.

Clases de igualaciones simples

El siguiente capítulo (XI) Pérez de Moya lo dedica al estudio de la tipología de las igualaciones. Esta importante cuestión viene enfocada de un modo muy diferente al que acostumbramos a encontrar en los textos modernos.

En primer lugar el autor comienza por aclarar que no existe unanimidad en el número de tipos de igualaciones en las obras que ha podido consultar, pero que el opta por establecer siete tipos agrupados en dos clases, las igualaciones simples con cuatro y las compuestas con tres.

> Los que escribieron sobre esta regla unos dijeron ser las igualaciones 8, otros 10. Yo pongo que 7 porque se entienda lo que quisieron decir, y el que quisiere ver mi parecer lea el capítulo decimocuarto. De estas 7, las cuatro son simples de dos cantidades, y las 3 compuestas de 3 cantidades.

Observemos que el primer criterio de clasificación no tiene relación alguna con el grado de las ecuaciones, sino con el número de elementos que aparecen en ellas. Así, nuestro autor considera dos grandes grupos, las igualaciones que tienen sólo dos elementos y las que contienen tres, denominadas por él simples y compuestas, respectivamente. Al igual que había ocurrido cuando se definieron los caracteres, también aquí los recursos matemáticos que se disponen en la época van a determinar totalmente el criterio clasificatorio. En efecto, pensemos que una ecuación con cuatro componentes supone, en el caso más sencillo, en el que intervienen cuatro caracteres consecutivos comenzando por el número (n, co. ce. cu.), una ecuación general de tercer grado. Para este tipo de ecuaciones no se conocía solución general a mediados del siglo XVI, ni tampoco para las generales de grados superiores. Por ello, y teniendo presente la importancia que las aplicaciones prácticas tenían en la enseñanza del álgebra, se entiende perfectamente que no se tomaran en consideración las igualaciones que tuvieran más de tres elementos.

Para entender ahora el criterio que lleva a subdividir las igualaciones simples en cuatro tipos vamos a seguir las palabras de Pérez de Moya que nos iluminan claramente al respecto:

1. La primera igualación que dicen simple de dos cantidades es cuando se iguala un carácter a otro y son igualmente distantes de la misma proporción y origen. Así como si la cosa igualase al n., donde claro parece no faltar ningún carácter entre co. y n., como faltaría si se igualase ce. a n. que sería la co. Y para que esto se entienda, digo que el primer carácter es n. (aunque por sí no denota cantidad proporcional, como denota la cosa y los demás caracteres), el segundo es co., el tercero ce., y así van procediendo en infinito. Entendido esto, si se igualasen dos caracteres el uno al otro (cualesquiera que sean), si entre el uno y el otro no faltare carácter de su continuación, así como si el ce. se igualase al cu. ó R. a cecu, en tal caso partirás lo que viniere con el menor carácter por lo que viniere con el mayor, y el cociente será el valor de la cosa y respuesta de la demanda.

2. La segunda igualación simple de dos cantidades es cuando entre el un carácter y otro de los dos que se igualan falta alguno. Como si ce. se igualase a n., donde parece claro faltar co., ó como si el cu. se igualase a co., entre los cuales falta el ce., y así de los demás. En tal caso partirás lo que viniere con el carácter menor por lo que viniere con el mayor, y la raíz (cuadrada) del cociente será el valor de la cosa y respuesta de la demanda.

3. La tercera igualación de las simples de dos cantidades es cuando entre los dos caracteres que se igualan faltan dos. Como si cu. se igualase a n., entre los cuales falta la co. y la ce. ó como si cce. se igualase a co., entre los cuales falta ce. y cu. En tal caso partirás lo que viniere con el carácter menor por lo que viniere con el mayor, y la raíz (cúbica) del cociente será el valor de la co. y respuesta de la demanda.

4. La cuarta es cuando faltan tres caracteres entre los dos que se igualaren, como si cce. se igualare a n., entre los cuales faltan co., ce., cu. En tal caso partirás lo que viniere con el menor carácter por lo que viniere con el mayor, y la raíz cuadrada de cuadrada será el valor de la co. y la respuesta de la demanda.

El autor es perfectamente consciente de que podría seguir considerando una quinta o más igualaciones simples, suponiendo que la diferencia entre los dos caracteres fuera de cuatro o más caracteres, pero esto implicaría que el valor de la *cosa* tuviera que obtenerse extrayendo una raíz quinta o de grado superior, lo que hace para la práctica cotidiana inútil la ampliación del número de las igualaciones simples.

Clases de igualaciones compuestas

Cuando analiza los tres tipos de igualaciones compuestas y el modo de resolverlas, Pérez de Moya hace intervenir otro criterio en la discusión. Para comprenderlo mejor conviene recordar que, en el Renacimiento, además de resolver las ecuaciones de segundo grado mediante técnicas geométricas, se conocía ya el método algebraico de hallar sus soluciones.

En estas compuestas de tres cantidades siempre se vienen a igualar dos caracteres a uno, y esto en uno de tres modos: porque unas veces se igualan los dos mayores al menor, otras el mayor y el menor al mediano, otras los dos menores al mayor....

Ejemplo. n., co., ce. El primero, que es número se dice menor, la co. se dice mediano, la ce. se dice mayor.

Entendido esto, la primera igualación de las compuestas es cuando vienen tres caracteres igualmente distantes, y que entre ellos no falta algún otro carácter, como n., co., ce., y así de otras cualesquiera, y que se igualan los dos caracteres mayores al menor; como si ce. y co. se igualan a n., o como si cu. y ce. se igualan a co. En tal caso partirás lo que viniere con los dos caracteres menores por lo que viniere con el mayor, y después saca la mitad del cociente del mediano y multiplícala por sí, y el producto sumarse ha con el cociente del menor. La raíz (cuadrada) de este conjunto menos la otra mitad del cociente del mediano será el valor de la cosa y respuesta de la demanda.

La segunda es cuando vienen tres caracteres igualmente distantes, de suerte que entremedias no falte algún carácter y que el mayor y menor se igualan al mediano; así como si ce. y n. se igualasen a co. y así de otros cualesquiera caracteres. En tal caso partirás lo que viniere con los caracteres menores por lo que viniere con el mayor, y después sacarás la mitad del cociente del mediano y multiplicarla has por sí, y de este producto restarás el cociente del menor carácter, y la raíz (cuadrada) de esta resta, más o menos la otra mitad del mediano, es el valor de la cosa y respuesta de la demanda.

Nota. Porque dice que la raíz de la resta p. ó m. la otra mitad del mediano será el valor de la cosa y respuesta de la demanda, se sigue que las demandas de esta igualación tendrán dos respuestas por la mayor parte. Y porque sepas cuándo será bien juntar a la raíz la mitad del mediano o quitarla tendrás este aviso: cuando la cantidad que estuviere con el carácter mediano fuere mayor que la cantidad que estuviere con el menor entonces juntarás la raíz con la mitad del mediano, y si fuere al contario, quiero decir, si la cantidad del menor fuere mayor que la del mediano, quitarás la raíz de la mitad del mediano.

La tercera igualación de las compuestas de tres cantidades es cuando vienen tres caracteres igualmente distantes, de arte que ningún carácter falte entre medias y que los dos menores se igualen al mayor; así como n. y co. yg. a ce., etc. En tal caso partirás lo que viniere con los caracteres menores por lo que viniere con el mayor (como has hecho en las precedentes), y después multiplicarás la mitad del cociente del mediano por sí misma y juntarla has con el cociente del menor, y la raíz (cuadrada) de toda esta suma y p. la otra mitad del cociente del mediano será el valor de la co. y respuesta de la demanda.

Creo que merece la pena que le dediquemos alguna atención a este fragmento. Primeramente observaremos que en los tres casos de *igualaciones compuestas* el autor afirma que todas ellas cumplen la condición de tener «tres caracteres igualmente distantes y que entre ellos no falta algún otro carácter», lo cual quiere decir, aunque no lo exprese de este modo, que se está refiriendo a tener tres caracteres consecutivos. Por lo tanto, el análisis de las *igualaciones compuestas* de Pérez de Moya se limita a las ecuaciones que nosotros llamamos de segundo grado, pues el estudio de cualquier otra ecuación de grado superior al dos que cumpla con la característica restrictiva de estar constituida por tres elementos consecutivos, al simplificar dejando de lado las soluciones nulas, acaba reduciéndose a una de segundo grado.

Para comprender el propósito de nuestro autor cuando distingue tres clases de igualaciones compuestas, debemos recordar, una vez más, que el objetivo primordial del álgebra en estas primeras aritméticas del siglo XVI es esencialmente utilitario. Pérez de Moya nos dice que la igualación es la expresión de una demanda o problema y en ella existen dos términos que se igualan, en el primero se coloca *lo que viniere en la demanda* y en el segundo *lo que quisieras que viniera*. La forma habitual con la que en los textos modernos se suele presentar la ecuación general de segundo grado, colocando en un término todos los elementos que intervienen, parecería sin duda extraña a un lector de la época de Pérez de Moya. Por ello este autor describe las únicas tres posibilidades que existen de distribuir tres elementos en los dos términos de una igualdad sin que uno de ellos quede vacío.

Hay todavía otro aspecto a considerar: el signo de las soluciones. Hemos ya descartado las soluciones nulas, pero tampoco las negativas pueden ser soluciones útiles a problemas reales, por lo que resulta también comprensible que Pérez de Moya prescinda de ellas al comentar las soluciones de los tres tipos de igualaciones compuestas.

Analicemos la solución que propone para el primer tipo: «*ce. y co. se igualan a n*». Si denotamos mediante la letra al coeficiente de x^2 (ce.), mediante la b el de x (co.) y mediante la c el término independiente (n.), podemos simbolizar las etapas de la solución:

En tal caso partirás lo que viniere con los dos caracteres menores por lo que viniere con el mayor b/2 c/a, y después saca la mitad del cociente del mediano y multiplícala por sí $(b/2a)^2$, y el producto sumarse ha con el cociente del menor $(b/2a)^2 + c/a$. La raíz (cuadrada) de este conjunto menos la otra mitad del cociente del mediano será el valor de la cosa $x = \sqrt{[(b/2a)^2 + c/a]} - b/2$.

Comparando esta última expresión con la que proporciona las soluciones de la ecuación general de segundo grado $a x^2 + b x + c = 0$ tal como viene presentada habitualmente, $x = [-b \pm \sqrt{[b^2 - 4ac]}] / 2a$, vemos que, salvo algunas variaciones de mero cálculo, hay total coincidencia excepto en dos cuestiones: el doble signo $\pm$ que conduce a la doble solución y el signo - del segundo sumando del radicando, que en la solución de la primera igualación es +. Esto último es fácil entender: en la primera igualación, el término independiente «c» está separado y colocado en el segundo miembro, por lo que, al pasarlo al primer término, para situarlo en la posición que habitualmente aparece en la ecuación general, el signo debe cambiar. Respecto al doble signo ±, que en la versión de Pérez de Moya se convierte sólo en +, también es perfectamente explicable, pues al evitar el signo - lo que hace es eliminar la solución negativa que no va ser de ninguna utilidad práctica al lector.

Una situación semejante nos encontramos al considerar el tercer tipo de igualaciones compuestas. En este caso, donde «los dos menores se igualan al mayor; así como n. y co. yg. a ce.», la solución que propone Pérez de Moya es también única y la podemos simbolizar $x = \sqrt{[(b/2a)^2 + c/a]} + b/2$. Aquí, el cambio de signo en el segundo sumando del radicando es debido a que ahora es 'ax^2' la componente que se encuentra aislada en el segundo miembro de la igualación, por lo que el signo de a debe cambiar si la pasamos al primer término y queremos comparar la expresión de nuestro autor con la habitual. También en esta ocasión, del doble signo ±, sólo mantendremos el + para obtener la solución positiva.

Especial interés tiene el segundo tipo de igualaciones compuestas: «*los dos menores se igualen al mayor; así como n. y co. yg. a ce*». En este caso la solución dada por el autor la podemos simbolizar de este modo: $x = \sqrt{[(b/2a)^2 - c/a]} \pm b/2$. Dado que ahora es bx la componente desplazada al segundo miembro de la igualdad, no aparece cambiado el signo del segundo sumando del radicando. Con la inclusión del doble signo ±, la coincidencia con la expresión que proporciona las soluciones de la ecuación general de segundo grado es total. Esta doble posibilidad es explicada por Pérez de Moya en nota aparte, en ella aclara al lector que sólo el análisis de los valores de los respectivos caracteres permite dilucidar el signo adecuado para obtener las soluciones (positivas) útiles.

Hemos precisado anteriormente, al hablar de las igualaciones compuestas, que la definición del autor, en la que afirma que son las igualaciones constituidas por tres caracteres igualmente distantes uno de otro y sin que falte ninguno entre ellos, podía simplificarse diciendo que los tres caracteres deben ser consecutivos. Pero esta definición de las igualaciones compuestas tan excesivamente larga es deliberada por parte de Pérez de Moya, pues al definirlas de esta manera deja abierta la posibilidad de tratar, como hace en la nota siguiente, las igualaciones en las que exista entre los caracteres el hueco de uno, de dos o de más caracteres, y que eran resolubles en la época. Este era el caso de las bicuadradas, las bicúbicas o todas aquellas que, una vez reducidas, tienen la forma general $ax^{2m} + bx^m + c = 0$:

> Nota. Si igualándose tres caracteres igualmente distantes en medio de cada dos de ellos falte un carácter, así como si se igualasen cce. y ce. a n., procederás como manda la primera igualación de las compuestas. Y si cce y n. se igualasen a ce., procederás como en la segunda. Y si n. y ce. se igualasen a cce. procederás como en la tercera. Y lo que viniere en todas será el valor de un censo, la raíz (cuadrada) del cual será el valor de la co., y respuesta de la demanda.
>
> Y si como en esto falta un carácter entre cada dos de estos igualados falten dos, después de haber hecho lo que la regla manda saldrá el valor de cu. y sabido el cu. saca su raíz cúbica y será el valor de la cosa y respuesta de la demanda. Y si faltasen 3 saldrá el valor del cce., cuya raíz cuarta será la respuesta de la demanda y valor de la cosa.... Y así podrás proceder en infinito.

Las demandas y su resolución

El capítulo XIII, es el más extenso del libro, pues ocupa prácticamente un tercio de su contenido, y está dedicado a presentar diferentes ejemplos de 'demandas', lo que nosotros denominamos usualmente problemas, y al modo de resolverlas. El capítulo está dividido en tantos «artículos» o apartados como tipos de igualaciones ha estudiado en el capítulo anterior, es decir, siete. En todas las demandas el esquema que sigue el autor es idéntico: primero plantea su enunciado, en segundo lugar expone con minucioso detalle el proceso resolutivo que le lleva a obtener la solución, justificando cada paso que realiza con referencia al artículo y capítulo en el que se trata la cuestión, finalmente comprueba la veracidad de la solución hallada reconstruyendo paso a paso la demanda con ese dato. Obviamente, por razones de espacio, no podemos extendernos reproduciendo todas las *demandas* que aparecen en el libro; por ello hemos optado por presentar, como muestra, un ejemplo de cada uno de los siete tipos de igualaciones, eligiéndolos entre los que nos han parecido más representativos del conjunto. Por motivos de brevedad hemos suprimido del texto las referencias a los artículos y capítulos, así como la comprobación de la corrección de cada solución.

Primera igualación simple

Uno compró una pieza de paño de tantas varas (unidad de longitud) que si paga cada vara a 4 ducados (unidad monetaria) le sobran 6 ducados, y si da 5 ducados por vara le faltan 10 ducados. Demando: ¿cuántas varas tenía la pieza y con cuántos ducados se halló?

Pon que la pieza tenía 1co. de varas, a 4 ducados la vara montará 4co., y porque a este precio le sobraron 6 ducados junta 6 ducados con 4 co. y serán 4co. p. 6 ducados. Prosigue comprando 1co. de varas a 5 ducados, que es el segundo precio, y serán 5co., y porque a este precio le faltaron 10 ducados quitarás 10 de las 5co. y quedarán 5co. m. 10 ducados. Iguala este segundo producto al primero de esta manera:

5co. m. 10 n. yg. 4co. p. 6n.

($5 x - 10 = 4 x + 6$)

Sigue los avisos de las demandas precedentes y hallarás 16, y tantas varas tenía la pieza, de lo cual sacarás que tenía 70 ducados el mercader».

Segunda igualación simple

Dame 3 números en cuádrupla proporción, que multiplicando el primero por el tercero monte 144.

Pon que el primer número de estos tres que te demandan es 1co., el segundo será 4co., el tercero 16co. Ahora multiplica el primero, que es 1co. por el tercero, que es 16co., y será 16ce. los cuales igualarás a 144n. que quisieras que vinieran, de esta manera: 16ce. = 144n. ($16 x^2 = 144$). Parte como la regla de esta igualación manda, 144, que es lo que viene con el carácter menor, por 16, que viene con el mayor, y vendrá el cociente 9, la raíz (cuadrada) de 9, que es 3, es el valor de la cosa y el primer número de los que buscas.

Tercera igualación simple

Uno gastó su dinero en pimienta, canela y clavos, y dice que lo que gastó en la canela es el duplo e lo que gastó en pimienta, y lo que gastó en clavos es el triple de lo que gastó en canela, y multiplicando lo que gastó en la pimienta por lo que gastó en canela y esta multiplicación multiplicada por lo que gastó en clavos el último producto es 96. Demando saber lo que gastó en cada producto.

Pon que gastó en pimienta 1co. de ducados, y en canela 2co. y en clavos 6co., multiplica estas tres posturas unas por otras y montará 12 cu., los cuales igualarás a 96n. que quisieras que vinieran, de esta manera: 12cu. yg. 96n. ($12 x^3 = 96$). Parte ahora, como la regla manda, los 96 que vienen con el carácter menor por los 12 que vienen con el mayor y vendrá al cociente 8. Saca la raíz (cúbica) de 8, que es 2, y tanto gastó en pimienta, y por consiguiente 4 en canela y 12 en clavos, como lo puedes probar haciendo lo que la demanda pide.

Cuarta igualación simple

Uno compró ciertas varas de paño, las cuales repartió a dos criados dando al uno dobladas varas que al otro. Estos mozos vendieron este paño por tanto ducados la vara como varas recibió su compañero, multiplicando los ducados que hizo el uno por los del otro montan 64; demando: ¿cuántas varas el dio a cada uno?

Pon por caso que dio al uno una co. de varas y al otro 2co., y porque dice que cada uno vendió la vara por tantos ducados como varas tenía el otro, multiplica 1co. de varas del primero por 2co., que son las varas del segundo, y montarán 2ce. y tanto ducados hizo el primero. Asimismo multiplica 2co., que son las varas del segundo, por 1co. de ducados, por razón que el primero tiene una cosa de varas, y montará otros 2ce., y tantos ducados hizo el segundo. Agora, multiplica 2ce., que son los ducados del primero, por otros 2ce., que son los del segundo, y serán 4cce., los cuales 4cce. igualarás a los 64 que quisieras que salieran, de esta manera: 4cce. yg. 64n. ($4x^4 = 64$). Sigue la regla de esta igualación, partiendo 64, que es lo que viene con el menor carácter, por los 4 que vienen con el mayor y vendrá al cociente 16. Saca de estos 16 dos veces la raíz (cuadrada), como manda la regla, y vendrán 2, y tanto es el valor de una cosa....

Primera igualación compuesta

Dame un número que juntándole 5 y por otra parte quitándole 2 y multiplicando la suma por la resta monte 98.

Pon que el número demandado es 1co., si le juntas 5n. será 1co. p. 5n. ($x + 5$), si le quitas 2 quedará 1co. m. 2n. ($x - 2$). Multiplicando 1co. p. 5n., que es la suma, por 1co. m. 2n., que es la resta, monta 1ce. p. 3co. m. 10n., lo cual igualarás a 98 n. que quisieras que vinieran, de esta manera: 1ce. p. 3co. m. 10n. yg. 98 n. ($x^2 + 3x - 10 = 98$). Pasa los 10n. que vienen menos en la una parte de la balanza a la otra y quedará la igualación de esta manera: 1ce. p. 3co. yg. 108n. Sigue la regla partiendo llanamente los 3 y los 108, que es lo que viene con menores caracteres, por 1, que viene con el ce., que en este ejemplo es el mayor, y vendrá a los cocientes lo mismo. Después saca la mitad del cociente del mediano, que es 3co. y será uno y medio, cuadra uno y medio y serán 2 y un cuarto, júntalo con 108, que es el cociente del menor carácter, y montará 110 y un cuarto, saca la raíz (cuadrada) y será 10 y medio, quita de esto la otra mitad del cociente del mediano, que es uno y medio, y quedarán 9. Estos 9 es el valor de una cosa y respuesta de la demanda.

Segunda igualación compuesta

Haz de 10 tales dos partes que multiplicando la una por la otra monte 21.

Pon por caso que la una parte sea 1co., la otra será todos los 10n. m. 1co., multiplicando 1co. por 10n. m. 1co., montará 10co. m. 1ce., lo cual será igual a 21n. que quisieras. Ahora pasa el 1ce. que en la una parte viene m. a la otra, con los 21n., y quedará 10co. yg. 1ce. p. 21n. ($10x = x^2 + 21$). Sigue lo que la regla monda, que es partir los 21 y los 10, que son las cantidades que vienen con los menores caracteres, por el 1, que viene con el mayor, y vendrán lo mismo a los cocientes. Saca la mitad de los 10, que es el cociente del menor, y será 5, cuádrala como se mostró y montará 25, de estos 25 resta los 21, que es el cociente del menor, y restarán 4. De estos 4 saca la raíz (cuadrada), que es 2, y estos 2 más la otra mitad del cociente del mediano, que es 5, serán 7 (pues el menos aquí no tiene lugar), es el valor de la cosa y respuesta de la demanda.

Tercera igualación compuesta

Uno compró ciertas varas de paño a razón de 4 ducados la vara, el cual las volvió a vender por tantos ducados la vara como varas compró y halló que había ganado 21 ducados; demando: ¿cuántas varas compró?

Pon que compró 1co. de varas, la cual multiplica por 4 y será 4co., junta con ellas 21 y serán 4c0. p. 21n., lo cual igualarás a 1ce., que son las varas que compró multiplicadas por sí, de esta manera: 4co. p. 21n. yg. 1ce. ($4x + 21 = x^2$). Sigue la regla partiendo las cantidades que vienen con los caracteres menores por la que viene con el mayor, y en este ejemplo vendrán los cocientes lo mismo. Saca la mitad del cociente del mediano, que es 2, y cuádralos y serán 4, júntalos con el cociente del menor, que es 21, y serán 25, la raíz (cuadrada) es 5; pues junta 5 con la otra mitad del cociente del mediano, que es 2, y serán 7, y tantas varas compró.

Sobre las clases de igualaciones

En el capítulo XIV, Pérez de Moya expone abiertamente su opinión sobre la cuestión del número de clases de igualaciones que existen. Se mueve entre la tradición que impone un número concreto, menor de diez, y su pensamiento que se decanta por un número infinito, o al menos eso es lo que él cree que se deriva de considerar los criterios que definen las igualaciones simples y compuestas:

> Según se colige del capítulo undécimo y duodécimo, las igualaciones no solamente son 6, ni 7, ni 8 ni 10 (como Frater Lucas (Luca Pacioli) y otros muchos antiguos y modernos dijeron), antes pueden ser infinitas. Porque si primera igualación dicen cuando entre el un carácter y otro de los dos que se igualan no falta ningún carácter, y segunda cuando falta uno, y tercera cuando faltan dos, etc., síguese de esto que si faltan 20 la igualación sería 21; y así se podría proceder en infinito con las simples de dos cantidades, y lo mismo sería con las compuestas de tres o más cantidades.

El resto del capítulo lo dedica a establecer una serie de reglas generales que pueden ser útiles al lector de su obra si se encuentra ante una igualación de un tipo diferente de los siete estudiados. Como no podía ser de otra manera las acompaña de ejemplos de demandas donde su resolución obliga a plantear ese tipo de igualaciones «inusuales». Creemos interesante citar dos ejemplos, uno dentro de la clase de las igualaciones simples y otro de las compuestas.

Igualación simple inusual

> Uno tiene tres rieles (barras pequeñas de metal) de plata que sus leyes están en doble proporción, y multiplicando la ley del primero por el cuadrado de la ley del segundo y lo que saliere vuelto a multiplicar por el cubo de la ley del tercero, esta última multiplicación monta 186624; pido: ¿qué ley tiene cada riel?
>
> Pon por caso que el primer riel tiene 1co. de dineros, y porque las leyes de todos ellos están en doble proporción el segundo tendrá 2co., y el tercero 4co. Ahora cuadra la ley del segundo riel, que es 2co., y serán 4ce. Asimismo cubica 4co., que es la ley del tercero, y serán 64cu. Ahora multiplica 1co., que es la ley del primer riel, por 4ce., que es el cuadrado de la ley del segundo y montarán 4cu.; multiplica más estos 4cu. por 64cu., que es el cubo de la ley del tercer riel, y montará 256cecu., lo cual igualarás a 186624n. que quisieras, de esta manera: 256cecu. yg. 186624n. ($256\ x^6 = 186624$), entre los cuales faltan cinco caracteres, que son: co., ce., cu., cce., R. Sigue la regla como en las precedentes has hecho, partiendo 186624, que es lo que viene con el menor carácter, por 256, que vienen con el mayor, y vendrá el cociente 729, de lo cual sacarás el cecu., quiero decir que raques la raíz (cuadrada) y de la raíz (cuadrada) la raíz cúbica, o al contrario, saca primero la raíz cúbica y de la raíz cúbica la raíz (cuadrada), y vendrán 3 de cualquier suerte. Y tanto es la ley del primer riel, y los del segundo serán 6 y los del tercero 12, como la demanda pide.

Notemos que esta demanda no corresponde a ninguno de los cuatro tipos de igualaciones simples, sino a una sexta igualación simple, pues requiere para su resolución la extracción de una raíz sexta. Es obvio que la resolución de igualaciones simples de un tipo superior al cuarto quedaba condicionada a que la solución pudiera obtenerse por la aplicación sucesiva de una combinación de raíces cuadradas y cúbicas, las únicas para las que existía algoritmo.

Igualación compuesta inusual

> Nota. En todas las igualaciones que se han puesto en las demandas de los capítulos precedentes siempre se ha igualado un carácter a otro, o dos a uno, si viniesen tres o más a igualarse a uno tendrás la regla que en la demanda siguiente se pondrá.
>
> Dos tienen reales (tipo de moneda), el uno 7 más que el otro, y cada uno ganó con cada real tantos ducados como reales tenía, y multiplicando los ducados que ganó el uno por los que ganó el otro montan 14400 ducados; pido: ¿cuántos reales tenía cada uno?
>
> Pon que el uno tuviese 1co. de reales, el otro porque dice que tenía 7 reales más tendrá 1co. p. 7n, y porque dice que cada uno ganó con cada real tantos ducados como reales tenía (que es lo mismo que si dijera que ganó tantos ducados como el cuadrado de sus reales) toma una cosa, que es lo que tiene el pri-

mero, y cuádrala y será un ce., y tanto es lo que ganó el primero; cuadras 1co. p. 7n. (que es lo que tiene el segundo) y montará 1ce. p. 14co. p. 49n., y tantos son los ducados que ganó el segundo. Ahora multiplica 1ce., que es la ganancia del primero, por 1ce. p. 14co. p. 49n. (que es la ganancia del segundo) y montará 1cce. p. 14cu. p. 49ce., lo cual igualarás a 14400, que son los ducados que quisieras que vinieran, de esta manera: 1cce. p. 14cu. p. 49ce. yg. 14400n. ($x^4 + 14\,x^3 + 49\,x^2 = 14400$), y quedarán tres caracteres iguales a uno. Pues en éstas y en sus semejantes sacarás la raíz (cuadrada) de cada parte de la igualación, quiero decir que sacarás la raíz de 1cce. p. 14cu. p. 49ce. y vendrá 1ce. p. 7co. Saca la raíz de 14400n., que es la otra parte de la igualación, y serán 120 números; iguala ahora un censo más siete cosas, que es la raíz de la una parte, a ciento y veinte números, que es la raíz de la otra, de esta manera: 1ce. p. 7co. yg. 120n. ($x^2 + 7\,x = 120$). Sigue la primera regla de las igualaciones compuestas de tres cantidades, y vendrá 8 por el valor de una cosa y respuesta de la demanda; y tantos reales dirás que tenía el primero. Y porque al segundo diste una cosa más 7, junta 7 con 8 que vale la cosa y serán 15, y tantos tenía el segundo, como puede probar haciendo lo que la demanda pide.

Resulta patente para el lector actual que este problema es fácil de resolver aunque nos conduzca a una ecuación de cuarto grado, pues permite aplicar en ella la regla inversa del cuadrado de un binomio, que es una situación concreta y especial. No obstante, pensamos que se ha de valorar positivamente el ejemplo que nos propone Pérez de Moya, porque manifiesta ser consciente de que la tipología de igualaciones que ha propuesto en el capítulo anterior, siguiendo el modelo de sus contemporáneos, sólo es una parte de las igualaciones posibles.

Para concluir, señalemos un aspecto menos reconocido de las virtudes de Pérez de Moya como autor de textos matemáticos, que podríamos unir a las de gran conocedor de la matemática de su época y las de buen divulgador, es su habilidad para el cálculo. Una muestra de esta habilidad la podemos encontrar en las dos notas que acompañan a la última demanda que acabamos de reproducir y que también es la última del libro. Es como un guiño final al alumno aventajado, al que después de mostrarle como puede resolver la igualación con cuatro elementos que acaba de plantear, utilizando los recursos que ha ido desarrollando a lo largo de las páginas anteriores, le dice que en realidad no hace falta recurrir a todo ello, le es suficiente con conocer los tipos básicos de igualaciones, si se tiene algo de intuición de cálculo.

Nota. Si como pusiste en esta demanda que el primero tenía una cosa y el segundo una cosa p. 7n. pusieras al primero una cosa m. 2 y al otro 1co. p. 9n., vinieran dos caracteres iguales a uno, y así se evitará lo dicho.

Nota. También puede hacer esta demanda y sus semejantes sacando raíz (cuadrada) de 14400, y vendrá 120, después ordenarás una regla diciendo: dos tienen reales, 7 el uno más que el otro, y multiplicando lo del uno por lo del otro hacen 120. Siguiendo la regla vendrán dos caracteres iguales a uno, como por la otra vía se hizo.

Referencias

Ediciones de la *Arithmética práctica y especulativa* consultadas

Pérez de Moya, J. (1569) *Arithmética práctica y especulativa.* Alcalá, Casa de Andrés de Angulo.

Pérez de Moya, J. (1590) *Arithmética práctica y especulativa*. Granada, Casa de Hugo de Mena.

Pérez de Moya, J. (2002) *Arithmética práctica y especulativa* en *Obras Completas*, Tomo II. Madrid, Fundación José Antonio de Castro.

Una introducció a l'àlgebra al segle XVI: «La regla de la cosa» de Juan Pérez de Moya

Resum: El propòsit del present treball és el de mostrar, a través d'un dels textos més destacats de l'època, com s'introduïa l'àlgebra en l'ensenyament pràctic de la matemàtica. Entre els objectius que es pretenen aconseguir, a més dels derivats del pur coneixement històric dels orígens d'aquest saber, estan els d'apreciar alguns aspectes de caràcter metodològic d'interès per a la didàctica de la matemàtica: el paper de les notacions i la utilització dels símbols en el desenvolupament de la matemàtica, les limitacions que imposava el desconeixement de certs recursos (com és el cas dels nombres decimals), o la importància determinant que els aspectes aplicats tenen en la introducció i posterior desenvolupament de l'àlgebra.

Paraules clau: Història de l'àlgebra, ensenyament de la matemàtica, llibres de text matemàtiques, història de les matemàtiques, segle XVI

Une introduction à l'algèbre au XVIe siècle : « La règle de la chose » de Juan Pérez de Moya

Résumé : Le propos du présent travail est de montrer, au travers de l'un des textes les plus remarquables de l'époque, comment fut introduit l'algèbre dans l'enseignement pratique de la mathématique. Parmi les objectifs que nous prétendons atteindre, en plus de ceux découlant de la pure connaissance historique des origines de ce savoir, se trouvent ceux d'apprécier certains aspects de caractère méthodologique d'intérêt pour la didactique de la mathématique : le rôle des notations et l'utilisation des symboles dans le développement de la mathématique, les limitations qu'imposait l'ignorance de certaines ressources —comme c'est le cas des nombres décimaux—, ou encore l'importance déterminante que les aspects appliqués purent avoir dans l'introduction et le développement postérieur de l'algèbre.

Mots clés : Histoire de l'algèbre, enseignement de la mathématique, livres de mathématiques, histoire des mathématiques, XVIe siècle

An introduction to algebra in the sixteenth century: Juan Pérez de Moya's La regla de la cosa

Abstract: This article examines the most notable sixteenth-century treatises on algebra to show how this subject was introduced in mathematics education. The objectives are to explain the particular origins of algebra as a subject in mathematics in this period and to study certain aspects of the methodology used in mathematics education: the role of notation and symbols in the development of mathematics, the limitations caused by the absence of certain resources (e.g., decimal numbers) and the role played by different factors in the introduction and subsequent development of algebra.

Keywords: History of algebra, teaching of mathematics, mathematics textbooks, history of mathematics, sixteenth century