Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2020-2021

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Matemàtiques en temps difícils: el teorema de Corominas-Sunyer

Vicenç Navarro
Catedràtic del Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Matemàtiques en temps difícils: el teorema de Corominas-Sunyer

Lliçó inaugural
del curs acadèmic
2020-2021
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Matemàtiques en temps difícils: el teorema de Corominas-Sunyer

Vicenç Navarro
Catedràtic del Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 7 d'octubre de 2020

Universitat de Barcelona
Edicions

Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu, www.edicions.ub.edu

Dipòsit digital: http://hdl.handle.net/2445/172661

Sumari

1. Introducció

En una lliçó com la d'avui, m'hauria agradat parlar d'algun dels grans matemàtics que estimo, com L. Euler, J. L. Lagrange o C. F. Gauss, i d'algun dels seus resultats, o teories, fonamentals per a les matemàtiques.

Però, donada la situació excepcional que estem vivint, en què tota la nostra societat ha patit els efectes de la greu pandèmia per la Covid-19, en què tots nosaltres hem estat confinats a casa, exiliats lluny de la Universitat, i la mateixa Universitat ha estat tancada, segurament sigui més apropiat parlar d'algun gran matemàtic que hagi hagut de viure, i fer matemàtiques, en una situació fins a cert punt similar a l'actual, en una situació també excepcional.

Com V. Poncelet, que va estar confinat a la presó de Saràtov dos anys, entre 1812 i 1814, i que va aprofitar aquell confinament per escriure un important tractat sobre les propietats projectives de les figures. Us recordo que Poncelet va ser el subjecte de la lliçó inaugural del curs 2017-2018, pronunciada pel Dr. J. C. Naranjo.

O com A. Cauchy, que va haver de deixar París arran de l'anomenada Monarquia de Juliol, i va exiliar-se durant vuit anys a Torí i Praga.

O com Ernest Corominas i Ferran Sunyer, uns matemàtics molt menys coneguts, que són els que he escollit per a la lliçó d'avui.

Per què he escollit parlar d'Ernest Corominas i Ferran Sunyer? Bàsicament, per tres raons.

La primera raó és perquè són dos matemàtics distingits (per exemple, figuren en la reconeguda pàgina d'història de les matemàtiques de la Universitat de St. Andrews), i que a més han estat alumnes de la nostra Universitat de Barcelona. Segurament han estat en aquest paranimf ocupant algun dels espais que avui ocupa algun de vosaltres.

I, com és obvi, ni L. Euler (1707-1783), ni J. L. Lagrange (1736-1813), ni C. F. Gauss (1777-1855), ni V. Poncelet (1788-1867), ni A. Cauchy (1789-1857), posseeixen aquesta condició d'exalumnes de la UB.

Dic que és obvi que els anteriors matemàtics no posseeixen aquesta condició d'exalumnes perquè, com bé sabeu, el 1714 la Universitat de Barcelona va tancar les portes, però no pas per una pandèmia sinó per una disposició del rei d'Espanya Felip V. En aquella ocasió, la Universitat va romandre tancada més d'un segle, fins al 1837. Mentre que les matemàtiques s'estaven obrint arreu del món, la Universitat de Barcelona estava tancada. Van ser uns temps difícils per a la Universitat. Ho sento per mi i per la Universitat.

La segona raó és que tant E. Corominas com F. Sunyer van fer matemàtiques d'altíssim nivell en situacions realment excepcionals; podríem dir que Corominas perpètuament exiliat, Sunyer perpètuament confinat, com detallaré breument tot seguit.

I, finalment, perquè el teorema del qual us parlaré és un resultat que, en la seva dimensió, és ple d'interessants relacions, amb l'anàlisi, l'àlgebra, la geometria, etc., moltes d'elles a priori insospitades. En aquesta lliçó intentaré mostrar algunes d'aquestes relacions, principalment les més geomètriques.

Agraeixo sincerament al senyor degà, Carles Casacuberta, que m'hagi proposat fer avui aquesta lliçó, que em dona l'oportunitat d'exposar el teorema de Corominas i Sunyer, un teorema extraordinari, una autèntica filigrana de les matemàtiques.

2. Els dos matemàtics

Els dos matemàtics protagonistes de la lliçó són, com ja he dit, Ernest Corominas i Vigneaux, i Ferran Sunyer i Balaguer. Faré una ràpida presentació dels dos indicant algunes dates biogràfiques de referència.

Ernest Corominas i Vigneaux (1913-1992)

Ernest Corominas i Vigneaux

- 1913, neix a Barcelona l'1 de febrer. És fill de l'escriptor, polític i economista Pere Corominas i Muntanya, i germà del lingüista i filòleg Joan Coromines, vuit anys més gran que ell.
- 1932-1936, obté la llicenciatura de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona.
- 1936-1939, és oficial de l'exèrcit de la República.
- 1939, emprèn el camí de l'exili: Argelers, París, Bordeus, Valparaíso. Entre el 4 d'agost i el 3 de setembre de 1939, viatja amb el paquebot

Winnipeg, llogat pel govern xilè a iniciativa de Pablo Neruda, del port de Trompeloup, a prop de Bordeus (França), fins a Valparaíso (Xile).

- 1939-1946, contacta amb J. Rey Pastor a Buenos Aires. És professor a Mendoza i Rosario, Argentina.
- 1947-1952, continua el seu exili, ara a París, on obté un contracte del CNRS.
- 1952, llegeix la tesi doctoral, dirigida per A. Denjoy, a la Universitat de París.
- 1952, torna a la Universitat de Barcelona com a investigador especial del CSIC.
- 1953, obté una beca de la Guggenheim Foundation. Corominas és un dels deu matemàtics d'aquell any, entre els quals es trobaven F. Browder, W. Hurewicz, O. Ore, A. Seidenberg i A. Zygmund.
- 1954, publica el teorema de Corominas-Sunyer als *C. R. Acad. Sci.*
- 1955, passa tot l'any a l'Institute for Advanced Study de Princeton (EUA), on coincideix amb H. Weyl, J. von Neumann, J. Leray, K. Gödel, i M. Morse, entre d'altres.
- 1960, deixa Barcelona. Emprèn, novament, el camí de l'exili, però ara és un exili per motius professionals.
- 1960-1964, és professor a Caracas (Veneçuela).
- 1964-1982, és professor titular a la Universitat de Lió (França), i a la seva jubilació és nomenat professor emèrit.
- 1992, mor a Lió, el 24 de gener, als 78 anys.

Ferran Sunyer i Balaguer (1912-1967)


Ferran Sunyer i Balaguer

- 1912, neix a Figueres el 6 de febrer amb una discapacitat física pràcticament total, una paràlisi irreversible de gairebé tots els moviments que l'obligarà a utilitzar una cadira de rodes per desplaçar-se, i farà que la major part del temps hagi d'estar confinat a casa. Al cap de dos anys mor el seu pare, i un any després la família es trasllada a Barcelona. Tots els estudis els farà de forma autodidacta, amb l'única ajuda de la mare i de dues cosines.

- 1934, comença a estudiar matemàtiques avançades.
- 1938, publica la seva primera nota als *C. R. Acad. Sci.*, presentada per J. Hadamard.
- 1940, es vincula al Seminari Matemàtic de la Universitat de Barcelona, creat pocs anys abans.
- 1947, Hadamard el posa en contacte amb el seu alumne i successor al Collège de France, Szolem Mandelbrojt.
- 1948, esdevé col·laborador del Seminari Matemàtic de la Universitat de Barcelona.
- 1952, publica a la revista *Acta Mathematica*.
- 1954, publica el teorema de Corominas-Sunyer, als *C. R. Acad. Sci.*.
- 1957, assisteix, acompanyat per les seves cosines, a la Primera Reunió de Matemàtics d'Expressió Llatina, celebrada a Niça. En aquesta reunió estableix una profitosa relació amb W. Sierpinski.
- 1960, obté la llicenciatura de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona, en circumstàncies molt excepcionals, ja que era un matemàtic d'altíssim nivell amb un gran reconeixement internacional.
- 1962, llegeix la tesi doctoral a la Universitat de Barcelona, amb J. M. Orts com a director de tesi.
- 1962, esdevé membre del Seminari Matemàtic de la Universitat de Barcelona.
- 1963, obté un contracte amb la Marina dels EUA.
- 1965, és convidat i participa en la reunió sobre anàlisi harmònica i transformades integrals, a Oberwolfach (Alemanya), juntament amb una trentena d'especialistes de tot el món.
- 1967, és nomenat investigador del CSIC (divuit dies abans de morir).
- 1967, mor a Barcelona, el 27 de desembre, als 55 anys.

Podeu trobar més detalls sobre les biografies de Corominas i Sunyer a:

J. Bruna, J. Cufí, «Ernest Corominas», *SCM/Notícies*, 36, (2014), 38-46.

M. Pouzet, «Obituary: Ernest Corominas», *Order*, 9, (1992), 1-3.

L. A. Santaló, «Ernest Corominas, (1913-1992)», *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 38, (1992), 157-158.

J. Augé, «Fernando Suñer Balaguer, (1912-1967)», *Gaceta Matemática*, XX, (1968), 3-7.

F. Carbona, «Record del matemàtic Ferran Sunyer», *Avui*, 26 de setembre de 1976, 21.

J. Cerdà, «Recensió de la biografía de Ferran Sunyer i Balaguer», *SCM/Notícies*, novembre de 1995, número 3, 12-14.

A. Malet, *Ferran Sunyer i Balaguer*, Institut d'Estudis Catalans, 1995.

3. El teorema de Corominas-Sunyer

Després de la guerra civil espanyola, Catalunya es va trobar amb mitja generació de matemàtics a l'exili, i l'altra mitja arrossegant la llosa de cent anys de retard. A més, la selecció i promoció dels professors i investigadors universitaris tingué uns condicionants ideològics que no van beneficiar gens Sunyer, d'una catalanitat manifesta, ni Corominas, clarament republicà.

Van ser temps difícils per a tots dos.

En aquestes difícils circumstàncies, quan Corominas va tornar a Barcelona, l'any 1952, va començar a visitar Sunyer al seu domicili. Compartien un gran amor per les matemàtiques i uns contractes amb la Universitat miserables. Així va començar una gran amistat. Fruit d'aquestes trobades és el teorema de Corominas-Sunyer, que ens ocupa.

Veiem com el mateix Ferran Sunyer presentava, modestament, el teorema al seu corresponsal Ricardo San Juan, catedràtic d'Anàlisi Matemàtica a la Universitat Complutense de Madrid, en una carta escrita pocs dies després de l'obtenció del resultat, ([16]).

3.11.53

Querido amigo San Juan:

[...]

Últimamente he visto a menudo al Sr. Corominas y entre los dos hemos demostrado el resultado siguiente.

Si $f(x)$ es una función infinitamente derivable sobre un intervalo, y si para todo x de este intervalo existe un entero n (que puede variar con x) tal que $f^{(n)}(x) = a$, donde a es una constante, entonces $f(x)$ es un polinomio. No es necesario le indique que cuando n es constante se convierte en un teorema de análisis elemental. No creemos tenga importancia pero es curioso.

[...]

El resultat té un enunciat ben senzill:

Teorema 3.1 (de Corominas-Sunyer, 1954). *Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en el segment $[a, b]$. Si per tot $x \in [a, b]$ existeix un enter $\nu = \nu(x) \geq 0$ (que pot variar amb x) tal que $f^{(\nu)}(x) = 0$, llavors $f(x)$ és un polinomi.*

I, com diu Sunyer, la subtilesa del teorema rau en el fet que els enters $\nu(x)$ poden variar amb x, perquè si això no fos així, si $\nu(x)$ fos constant, aleshores el teorema del valor mitjà ens condueix fàcilment al teorema d'anàlisi elemental al qual fa referència:

Teorema 3.2 (d'anàlisi elemental). *Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en el segment $[a, b]$. Si existeix un enter $\nu \geq 0$ tal que $f^{(\nu)}(x) = 0$, per a tot $x \in [a, b]$, llavors $f(x)$ és un polinomi.*

Per apreciar millor la subtilesa del teorema de Corominas-Sunyer, considerem el resultat anàleg en l'anàlisi p-àdica i en l'anàlisi complexa.

Tenim un teorema semblant en l'anàlisi p-àdica? No, perquè, en aquest cas, el teorema és trivialment fals, ja que en l'anàlisi p-àdica no es verifica, en general, el teorema del valor mitjà. Per exemple, la funció $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$,

$$f(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots) = a_0 + a_1 p^2 + a_2 p^4 + \cdots,$$

té derivada $f'(x) = 0$, per a tot $x \in \mathbb{Z}_p$, però f no és constant.

I, en l'anàlisi complexa? Sí, però aleshores, el teorema es dedueix immediatament del principi de les caselles de Cantor i del principi dels zeros aïllats, com veurem amb més detall en el proper apartat.

Podem dir, breument, que el resultat de Corominas-Sunyer es troba al mig d'un cas que és trivialment fals i d'un altre que és trivialment cert.

4. El principi de les caselles de Cantor

A més del teorema del valor mitjà, i els seus corol·laris, el resultat que podem veure a l'origen del teorema que ens ocupa és la meravellosa descoberta feta per G. Cantor, el 1874, ([6]), de l'existència de dos tipus diferents d'infinits.

Teorema 4.1 (de no-numerabilitat de Cantor, 1874). *Els nombres reals no són numerables, és a dir, no existeix cap bijecció del conjunt dels nombres naturals,* $\mathbb{N}$, *amb el conjunt dels nombres reals,* $\mathbb{R}$.

Hem de dir que la qualificació anterior de «meravellosa» és subjectiva, naturalment, encara que sigui majoritària avui dia. Però, les primeres reaccions als resultats de Cantor no van ser tan favorables, i, en particular, L. Kronecker i C. Hermite van ser dos dels principals enemics de les teories de Cantor.

George Cantor
(1845-1918)

Cantor va donar dues demostracions del teorema de no-numerabilitat, totes dues molt interesants, i que val la pena recordar.

La primera prova, la prova original del 1874, es basa en el fonamental principi dels segments encaixats. Mentre que la segona prova, de 1891, ([7]), es basa en el famós argument diagonal.

Cadascun dels dos arguments permet demostrar, convenientment interpretats, resultats anàlegs, en situacions abstractes més generals, que van molt més enllà de la situació originalment considerada per Cantor. En particular, l'argument diagonal permet provar el teorema següent:

Teorema 4.2 (Principi de les caselles de Cantor, 1891). *Sigui* $\{F_n\}$ *un recobriment numerable d'un conjunt* X. *Si* X *és un conjunt no numerable, llavors almenys un dels subconjunts* F_n *és no numerable.*

Fem un incís sobre el principi anterior.

Com és ben sabut, el principi de les caselles, o del colomar, es pot enunciar així:

Teorema 4.3 (Principi de les caselles de Dirichlet, 1834). *Sigui* $\{F_a\}_{a\in A}$ *un recobriment finit d'un conjunt finit* X. *Si* $\operatorname{card} X > \operatorname{card} A$, *llavors almenys un dels subconjunts* F_a *és de cardinal* > *1.*

Per tant, el resultat de Cantor es pot interpretar com una versió per a conjunts infinits del principi de les caselles de Dirichlet, i d'aquí el nom que li hem donat.

Amb els dos resultats precedents de Cantor, ja podem veure amb detall la prova del teorema de Corominas-Sunyer en el cas complex.

Prova del teorema de Corominas-Sunyer en el cas analític. En efecte, si f és una funció analítica sobre un disc $\mathbb{D}_r$ de radi $r > 0$, i, per cada punt del disc, f té una derivada d'ordre superior nul·la, aleshores els tancats

$$F_n = \{x \in \mathbb{D}_r; f^{(n)}(x) = 0\}$$

defineixen un recobriment numerable de $\mathbb{D}_r$ i, pert tant, la família $\{F_n \cap \mathbb{D}_{r/2}\}$ defineix un recobriment numerable del disc de radi $r/2$, $\mathbb{D}_{r/2}$.

Com que pel teorema de no-numerabilitat, aquest disc $\mathbb{D}_{r/2}$ és un conjunt no numerable de punts, existeix, pel principi de les caselles de Cantor, un conjunt $F_m \cap \mathbb{D}_{r/2}$ que és no numerable.

Ara, com que $\mathbb{D}_{r/2}$ és relativament compacte en $\mathbb{D}_r$, pel teorema de Bolzano-Weierstrass, F_m té un punt d'acumulació en $\mathbb{D}_r$, i d'aquí resulta, pel principi dels zeros aïllats, que la derivada m-èsima de f és idènticament nul·la sobre $\mathbb{D}_r$.

Per tant, podem aplicar la variant complexa del teorema 3.2, i concloure que f és un polinomi de grau $< m$. $\square$

Abans de continuar amb el punt següent, pot ser convenient recordar unes definicions ben conegudes de Cantor i reinterpretar la prova anterior.

Si X és un espai topològic i A és un subconjunt de X, Cantor anomena *conjunt derivat* de A, A', al subconjunt format per tots els punts d'acumulació de A. Els punts de $A \setminus A'$ es diu que són *punts aïllats* de A. Amb aquestes definicions, A és un tancat de X si, i només si, $A' \subseteq A$. Finalment, es diu que A és un *subconjunt perfecte* de X, si $A = A'$, és a dir, si A és un tancat sense punts aïllats.

Per tant, els teoremes de Cantor i Bolzano-Weierstrass ens permeten concloure el teorema següent:

Teorema 4.4 (del derivat no buit). *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic X.*

Si X és no numerable, localment compacte i amb una base numerable d'oberts, llavors almenys un dels tancats F_n té derivat F_n' no buit.

En la prova anterior del teorema de Corominas-Sunyer en el cas analític, hem deduït d'aquest teorema 4.4 que *«existeix un F_n tal que $F_n' \neq \emptyset$»*, mentre que del principi dels zeros aïllats hem obtingut que *«si $F_n' \neq \emptyset$, llavors $F_n = \mathbb{D}_r$»*.

La primera frase és la part purament topològica de la prova i la segona és la part més analítica. En la prova del teorema de Corominas-Sunyer trobarem una divisió semblant.

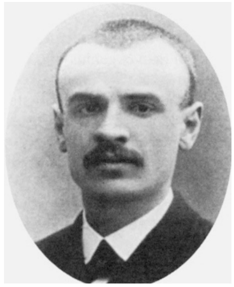
5. La teoria topològica de Baire

Corominas i Sunyer començaven la seva nota als *Comptes Rendus* amb la frase següent:

> Les théorèmes dont il est question dans cette Note sont des applications de la théorie topologique des ensembles parfaits d'après Baire.

I, en efecte, és aquesta teoria la que dona una especial profunditat al teorema de Corominas-Sunyer. Recordem-la breument.

René Baire va provar en la seva tesi, ([1]), amb una reelaboració acurada del primer argument de Cantor sobre la no numerabilitat dels nombres reals, el següent resultat.



René-Louis Baire
(1874-1932)

Teorema 5.1 (de categories, 1899). *Sigui* $\{F_n\}$ *un recobriment numerable d'un segment* $[a, b]$ *de la recta real. Si els subconjunts* F_n *són tancats, llavors almenys un dels tancats* F_n *té interior no buit.*

Alguns anys més tard, el 1914, F. Hausdorff va expressar aquesta mateixa prova en termes més moderns, ([11]), i va donar el resultat següent, que és el que actualment es coneix com a teorema de Baire.

Teorema 5.2 (de Baire). *Sigui* $\{F_n\}$ *un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic* X. *Si* X *és un espai completament metritzable (o un espai de Hausdorff localment compacte), llavors almenys un dels tancats* F_n *té interior no buit.*

Aquest enunciat s'assembla tant al principi de les caselles de Cantor que sovint es diu que n'és la versió topològica. Amb tot, jo diria que aquesta seria la versió topològica «difícil», i que la versió topològica «fàcil» seria el resultat que hem anomenat *teorema del derivat no buit*, i que hem obtingut a partir del principi de les caselles de Cantor i del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Si considerem els oberts complementaris $U_n = X - F_n$, el resultat anterior és un corol·lari immediat de la coneguda formulació del teorema de Baire:

Teorema 5.3. *Sigui* $\{U_n\}$ *una família numerable d'oberts d'un espai topològic* X. *Si* X *és un espai completament metritzable (o un espai de Hausdorff localment compacte), i els oberts* U_n *són densos, llavors la intersecció* $\cap_n U_n$ *és densa en* X.

Avui dia sabem que el teorema de Baire té importants aplicacions en diferents branques de les matemàtiques, notablement en teoria axiomàtica de conjunts, en teoria descriptiva de conjunts, en anàlisi real i anàlisi complexa, en anàlisi funcional, en topologia i topologia diferencial, etc.

Aquesta ubiqüitat de la teoria de Baire fa que sigui convenient donar la definició següent:

Definició 5.4. *Sigui X un espai topològic, es diu que X és* un espai de Baire *si per a tota família numerable $\{U_n\}$ d'oberts densos de X, la intersecció $\cap_n U_n$ és densa en X.*

I es diu que X és hereditàriament de Baire *si tot tancat de X és un espai de Baire.*

Resulta del teorema anterior que tots els espais completament metritzables, i tots els espais de Hausdorff localment compactes, són espais hereditàriament de Baire. Altres exemples interessants d'espais de Baire s'obtenen del resultat següent:

Proposició 5.5. *Sigui X un espai topològic, i sigui Y un G_δ-conjunt de X, això és, Y és la intersecció d'una família numerable d'oberts de X: $Y = \cap_n U_n$.*

Si X és un espai de Baire i Y és dens, llavors Y és un espai de Baire.

Si X és un espai hereditàriament de Baire, llavors Y és un espai hereditàriament de Baire.

6. El problema de Sierpinski dels recobriments

La conclusió del teorema de Baire:

existeix un N tal que F_N té interior no buit,

sovint ja és suficient per arribar a la conclusió final que es persegueix. Però, de vegades, això no és així, i ens caldria la conclusió

existeix un N tal que $F_N = X$,

com, per exemple, en la prova del teorema de Corominas-Sunyer, en el cas analític. I, aleshores, direm que *el recobriment és trivial*.

Per exemple, poc abans de Baire, E. Borel va presentar la seva tesi, també a París, ([5]), i hi va provar el teorema de finitud següent:

Émile Borel (1871-1956)

Teorema 6.1 (del recobriment de Borel, 1895). *Sigui $\{T_n\}$ una família numerable de segments tancats d'un segment $[a, b]$ de la recta real. Si els interiors dels segments T_n recobreixen el segment $[a, b]$, llavors un nombre finit d'aquests oberts ja recobreix el segment $[a, b]$.*

Com que, a partir de la família $\{T_n\}$, podem definir la família creixent $\{F_n\}$,

$$F_n = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n,$$

el teorema de Borel ens permet afirmar que existeix un N tal que $[a, b] = F_N$; és a dir, que aquest recobriment $\{F_n\}$ és trivial.

Sierpinski va plantejar, el 1918, el problema següent:

Waclaw Sierpinski
(1882-1969)

Problema de Sierpinski dels recobriments. *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic X. Donar condicions* no trivials *per tal que el recobriment $\{F_n\}$ sigui* trivial.

A continuació, veurem alguns resultats clàssics que són exemples de solució d'aquest problema. El primer exemple de solució que donarem és un resultat molt celebrat de W. Sierpinski, ([14]).

Teorema 6.2 (de no partició de Sierpinski, 1918). *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic X, connex i Hausdorff.*

Si X és compacte i els tancats F_n són disjunts, llavors el recobriment és trivial.

És possible que el mètode d'obtenció de les corbes conegudes actualment com a triangle i catifa de Sierpinski, que el mateix Sierpinski havia obtingut poc abans ([12], [13]), fos la motivació del resultat general del teorema, ja que el teorema es pot formular, també, donant condicions perquè una família de tancats no sigui un recobriment.

Teorema 6.3. *Sigui* $\{F_n\}$ *una família numerable de tancats d'un espai topològic* X, *connex i Hausdorff.*

Si X *és compacte i els tancats* F_n *són disjunts i no trivials, llavors la família* $\{F_n\}$ *no recobreix* X.

Al final de l'article [14], Sierpinski planteja un problema:

> *Il serait intéressant d'examiner si notre théorème est vrai pour tous les ensembles fermés dans le plan.*

que és la formulació original del problema plantejat anteriorment.

Exemple. Recordem la construcció de la catifa de Sierpinski.

Sigui C un quadrat del pla. La catifa de Sierpinski, Π, s'obté dividint C en 3×3 quadrats, eliminant de C l'interior del quadrat central C_1, i, d'una manera recursiva, eliminant l'interior dels quadrats centrals C_n, de raó $1/3$, de tots els quadrats complementaris que successivament van quedant, ([13]). És clar que Π és compacte no buit, ja que

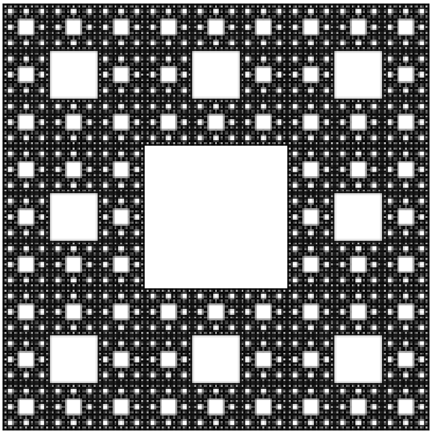
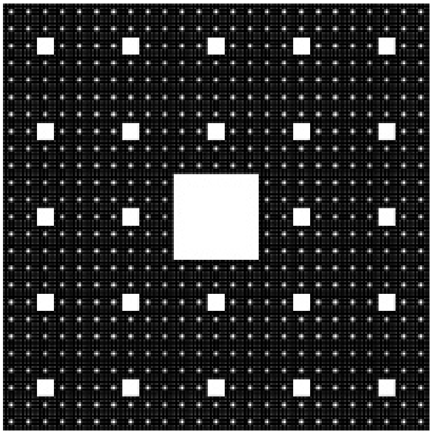
$$\Pi = \cap_n \left(C \setminus (C_n)^\circ\right)$$

i també és clar que

$$\cup_n \partial C_n \subseteq \Pi.$$

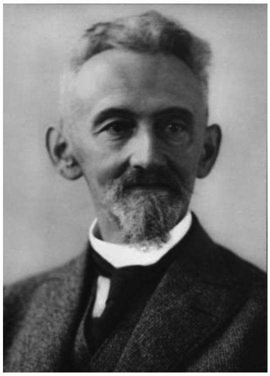
Com que els quadrats C_n són disjunts, aplicant el teorema de Sierpinski a C podem concloure que la família formada per tots els quadrats tancats $\{C_n\}$ no recobreix C i que, en definitiva, $\Pi \setminus \cup_n \partial C_n$ és no buit.

És clar que consideracions semblants es poden fer per a les catifes de Sierpinski generalitzades $\Pi_{\mathbf{a}}$. Recordem que aquestes catifes es defineixen a partir d'una successió de nombres senars $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, dividint C en $(a_1)^2$ quadrats, eliminant de C l'interior del quadrat central C_1, i, recursivament, eliminant l'interior dels quadrats centrals C_n, de raó $1/a_n$, de tots els quadrats complementaris que successivament van quedant. Si $\mathbf{a} = (a, a, a, \dots)$ es posa Π_a, de manera que, per exemple, la catifa original de Sierpinski és Π_3.

Catifes de Sierpinski Π_3 i Π_5

Una altra solució al problema de trivialitat la podem trobar en Hausdorff.



Felix Hausdorff
(1868-1942)

En efecte, en la segona edició de la seva obra mestra *Mengenlehre*, ([11]), exposava el resultat següent:

Teorema 6.4 (de no partició de Hausdorff, 1927). *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic X, connex i Hausdorff.*

Si X és localment connex i hereditàriament de Baire, i els tancats F_n són disjunts, llavors el recobriment és trivial.

Donarem la prova d'aquest teorema, i d'alguns dels que segueixen per fer palesa la seva relació amb la demostració del teorema de Corominas-Sunyer, i la subtilesa d'aquesta última.

Demostració. Posem $E_n = (F_n)^\circ$. La reunió $E = \cup_n E_n$ és un obert de X, i, per tant, $B = X \setminus E$ és un tancat de X.

Suposant que B és no buit, arribarem a una contradicció.

Considerem el recobriment per tancats de B, $B = \cup_n B \cap F_n$.

Com que B és un tancat de X, B és de Baire; i, per tant, existeix un obert V de X i un M tals que $\emptyset \neq V \cap B \subseteq F_M$.

D'aquí resulta que $V \nsubseteq F_M$ i, per tant, existeix un $N \neq M$ tal que $V \cap F_N$ també és no buit.

A més, com que X és localment connex, podem suposar que V és un obert connex.

Com que V és connex i $\neq E_N$, la igualtat $V = (V \setminus F_N) \cup (V \cap FrF_N) \cup (V \cap E_N)$ implica que $V \cap FrF_N = V \cap B \cap F_N$ és no buit, cosa que contradiu la inclusió de $V \cap B$ en F_M, atès que F_M i F_N són disjunts.

Es dedueix, doncs, que B és buit i, per tant, que $X = E$.

Com que X és connex i $E = \cup_n E_n$ és una reunió d'oberts disjunts, tenim, en definitiva, que E és connex, que existeix un únic E_N no buit i que

$$X = E = E_N = F_N. \qquad \square$$

Exemple. Sigui T un triangle del pla i sigui Γ el triangle de Sierpinski de T, que s'obté eliminant de T l'interior del triangle medial T_1, i, d'una manera recursiva, eliminant l'interior dels triangles medials T_n, de tots els triangles complementaris que successivament van quedant, ([12]). És clar que Γ és compacte no buit, ja que

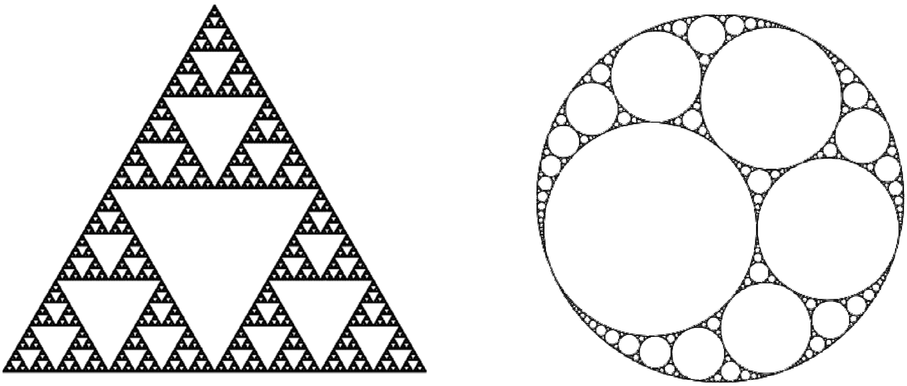
$$\Gamma = \cap_n \, (T \setminus (T_n)^\circ)$$

i també és clar que

$$\cup_n \, \partial T_n \subseteq \Gamma.$$

Si V és el conjunt format per tots els vèrtexs dels triangles T_n, com que V és numerable, $T \setminus V$ és un G_δ-conjunt dens de T, i per tant és hereditàriament de Baire. Com que també és connex i localment connex, aplicant el teorema de Hausdorff a $T \setminus V$, podem concloure que la família formada per tots els triangles tancats $\{T_n\}$ no recobreix T, i que, en definitiva, $\Gamma \setminus \cup_n \partial T_n$ és no buit.

Podem aplicar el mateix raonament per a altres fractals de generació similar, com ara uns cercles d'Apol·loni.



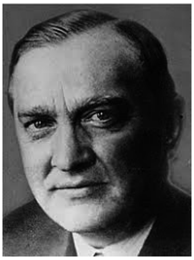
Triangle de Sierpinski i cercles d'Apol·loni

Tot i que els dos teoremes anteriors són ben coneguts, (probablement perquè apareixen en el *Mengenlehre* de Hausdorff), les solucions més destacades del problema de trivialitat es troben en l'anàlisi funcional, i més especialmente en la teoria dels espais de Banach.

Com, per exemple, el resultat següent de Banach que implica que els espais de Banach de dimensió infinita no tenen dimensió algebraica numerable.

Teorema 6.5. *Sigui* $\{F_n\}$ *un recobriment tancat i numerable d'un espai de Banach* X.

Si els tancats F_n *són subespais vectorials de* X, *llavors el recobriment és trivial.*



Stefan Banach
(1892-1945)

Hugo Steinhaus
(1887-1972)

Demostració. Com que X és un espai mètric complet, pel teorema de Baire, existeix un N tal que F_N té interior no buit; i, per tant, existeix un $r > 0$ i un x_0 tal que la bola $B(x_0, 2r) \subseteq F_N$.

Considerem ara un vector $u \in X, u \neq x_0$.

Si $t = d(u, x_0)/r$, i posem $v = x_0 + (x_0 - u)/t$, tindrem que $d(v, x_0) = r$, i, per tant, que v pertany a la bola $B(x_0, 2r) \subseteq F_N$.

Com que F_N és un subespai vectorial de X, el vector $u = x_0 + t(x_0 - v) \in F_N$. D'aquí resulta, en definitiva, que $X = F_N$. □

Però, possiblement, la solució més destacada del problema de trivialitat dels recobriments sigui el teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 6.6 (de Banach-Steinhaus, 1927). *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai de Banach X.*

Si els tancats F_n verifiquen:

i) $F_n + F_m \subseteq F_{n+m}$,

ii) $F_n = -F_n$, *i*

iii) si $\lambda > 0$ *i* $\lambda n \leq m$, *es té que* $\lambda F_n \subseteq F_m$,

llavors el recobriment $\{B \cap F_n\}$, de la bola unitat tancada B de X, és trivial.

Demostració. Com en la prova anterior, existeix un F_m, un $r > 0$ i un x_0, tals que la bola $B(x_0, 2r) \subseteq F_m$.

Prenguem un $N \geq 2m/r$.

Si $u \in B$, com que $u = 1/r\,((x_0 + ru) - x_0)$, i tant $x_0 + ru$ com x_0 pertanyen a F_m, resulta que $u \in F_N$. □

La formulació anterior del teorema de Banach-Steinhaus no és la més usual, que és la següent, ([2]):

Teorema 6.7 (de la fita uniforme, 1927). *Sigui X un espai de Banach, Y un espai normat, i $\mathscr{F}$ una família d'operadors lineals fitats, $\mathscr{F} \subseteq L(X, Y)$.*

Si, per a tot x de X, existeix un nombre real $m = m(x)$ (que pot variar amb x) tal que $\| T(x) \| \leq m(x)$, per a tot $T \in \mathscr{F}$, llavors existeix un nombre real M tal que $\| T(x) \| \leq M$, per a tot $T \in \mathscr{F}$ i tot vector x de la bola unitat de X.

Demostració. Veiem que, si posem

$$F_n = \{x \in X; \| T(x) \| \leq n, \textit{per a tot } T \in \mathscr{F}\},$$

la hipòtesi del teorema és precisament que aquests F_n defineixen un recobriment numerable i tancat de X. Com que, d'altra banda, aquests tancats F_n verifiquen clarament les hipòtesis del teorema previ, se segueix que existeix un M tal que $B = B \cap F_M$, o sigui que existeix un M tal que $\| T(x) \| \leq M$, per a tot $T \in \mathscr{F}$ i tot vector $x \in B$. $\square$

7. *La demostració del teorema*

Corominas i Sunyer arriben al seu resultat provant prèviament el següent teorema d'anul·lació uniforme, el resultat del qual n'és un corol·lari immediat, com ja hem esmentat.

Teorema 7.1 (d'anul·lació uniforme de Corominas-Sunyer). *Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en el segment $[a, b]$.*

Si, per a tot $x \in [a, b]$, existeix un enter $\nu = \nu(x) \geq 0$, (*que pot variar amb x*), *tal que $f^{(\nu)}(x) = 0$, llavors existeix un $N \geq 0$ tal que $f^{(N)}(x) = 0$, per a tot $x \in [a, b]$.*

Amb aquesta formulació, podem veure clarament que el teorema de Corominas-Sunyer és una resposta al problema de Sierpinski dels recobriments, perquè si posem

$$F_n = \{x \in [a, b]; f^{(n)}(x) = 0\},$$

aleshores la hipòtesi del teorema és que aquests F_n defineixen un recobriment tancat i numerable de $[a, b]$, i la conclusió del teorema és precisament que existeix un N tal que $[a, b] = F_N$, és a dir, que aquest recobriment és trivial.

A continuació, donarem la prova del teorema de Corominas-Sunyer, (seguint la popular referència [3]), però en separarem la part topològica de l'analítica per posar de manifest la relació que té amb els teoremes anteriors.

Teorema 7.2 (de Corominas-Sunyer, part topològica). *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable de l'interval $[a, b]$.*

Si els tancats F_n verifiquen:

i) si $P \subseteq F_n$ és tal que $P \subseteq P'$, llavors $P \subseteq F_{n+1}$;

ii) si U és un obert connex de $E_m = (F_m)^{\circ}$, tal que $\overline{U} \cap F_{m-1} \neq \emptyset$, llavors $U \subseteq E_{m-1}$;

aleshores el recobriment és trivial, és a dir, existeix un N tal que $[a, b] = F_N$.

A més, $F_n = F_N$, per a tot $n \geq N$, i F_n és d'interior buit per a tot $n < N$.

Abans de provar aquest resultat, veiem com, en efecte, se'n dedueix el teorema de Corominas-Sunyer. Aquesta és la part analítica de la prova.

Teorema 7.3 (de Corominas-Sunyer, part analítica). *Els tancats*

$$F_n = \{x \in [a, b]; f^{(n)}(x) = 0\}$$

verifiquen les hipòtesis i) i ii) de la part topològica anterior.

Demostració. En efecte, si $P \subseteq F_n$, per a tot x de P, $f^{(n)}(x) = 0$. Així, $f^{(n)}$ és constant sobre P. Per tant, si $P \subseteq P'$, resulta que $f^{(n+1)}(x) = 0$, per a tot x de P.

Si U és un obert connex de $E_m = (F_m)^{\circ}$, llavors f és un polinomi de grau $< m$, sobre U; per tant, la derivada f^{m-1} és constant sobre l'adherència $\overline{U}$. Així, si $\overline{U} \cap F_{m-1} \neq \emptyset$, la derivada $f^{(m-1)} = 0$ sobre U, de manera que $U \subseteq E_{m-1}$. □

Donem ara la prova de la part topològica.

Demostració. De la primera hipòtesi s'obté que la successió d'interiors $\{E_n\}$ és creixent ja que, com que E_n és obert, $E_n \subseteq E_n'$.

De la segona hipòtesi s'obté que si U és una component connexa de la unió dels interiors

$$E = \cup_n E_n,$$

existeix un n tal que $U \subseteq E_n$. En efecte, si $U = (a,b), m = \min\{n; U \cap E_n \neq \emptyset\}$, i (a_1, b_1) és una component connexa de $U \cap E_m$, resulta de ii) que $a_1 = a$ i $b_1 = b$.

Pel teorema de Baire, E és un obert dens de $[a,b]$, i, per tant,

$$B = [a,b] \setminus E$$

és un tancat d'interior buit. Si suposem que B és no buit, arribarem a una contradicció.

En primer lloc, observem que el fet que la successió d'interiors E_n sigui creixent implica que B no té punts aïllats. En efecte, si p fos un punt aïllat de B, p seria de la frontera de dos oberts connexos de E, U i V. Així, si $U \subseteq E_s$ i $V \subseteq E_t$, i $s = \max\{s,t\}$, obtindríem que

$$U \cup \{p\} \cup V \subseteq F_s$$

i, per tant, $p \in E_s$, cosa que contradiu que p és de B.

Considerem el recobriment per tancats de B, $B = \cup_n B \cap F_n$.

Com que B és compacte, una segona aplicació del teorema de Baire ens dona que existeix un interval obert $\mathcal{J}$ i un M tals que

$$\emptyset \neq \mathcal{J} \cap B \subseteq F_M.$$

A més, com que $B = B'$ i $\mathcal{J}$ és obert, es té que $\mathcal{J} \cap B \subseteq (\mathcal{J} \cap B)'$ i, per tant, de i) se seguirà que $\mathcal{J} \cap B \subseteq F_n$, per a tot $n \geq M$.

Atès que l'interior de B és buit, $\mathcal{J} \cap E \neq \emptyset$. Veurem que totes les components connexes de $\mathcal{J} \cap E$ estan contingudes en F_M i, per tant, que

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J} \cap B) \cup (\mathcal{J} \cap E) \subseteq F_M.$$

D'aquí resultarà que $\mathcal{J} \subseteq E_M$, cosa que contradiu $\emptyset \neq \mathcal{J} \cap B$.

Sigui $U \subseteq E_s$ una component connexa de $\mathcal{J} \cap E$.

Si $s \leq M$, resulta immediatament que $U \subseteq E_s \subseteq E_M \subseteq F_M$.

Suposem ara que $s > M$. Veiem que $\overline{U} \cap \mathcal{J} \cap B \neq \emptyset$. En efecte, si $\overline{U} \cap \mathcal{J} \cap B$ fos buit, resultaria que

$$\overline{U} \cap \mathcal{J} = \overline{U} \cap (\mathcal{J} \cap B \cup \mathcal{J} \cap E) = U,$$

i, per tant, $\mathcal{J} = U$, cosa que contradiria $\emptyset \neq \mathcal{J} \cap B$.

Així, com que $s - 1 \geq M$, s'obté que

$$\emptyset \neq \overline{U} \cap \mathcal{J} \cap B \subseteq \overline{U} \cap F_{s-1},$$

i resulta de ii) que $U \subseteq F_{s-1}$. Per tant, reiterant l'argument es conclou que $U \subseteq F_M$.

Es dedueix, doncs, que B és buit i, per tant, que $[a, b] = E$.

En definitiva, E és connex i, així, si E_N és l'interior no buit minimal, s'obté que

$$[a, b] = E = E_N = F_N. \qquad \square$$

Un premi que ens dona la presentació anterior és que gairebé el mateix argument que prova la part topològica, ens permetrà establir una versió del teorema de Corominas-Sunyer, que és una solució al problema de Sierpinski més general que el teorema de no partició de Hausdorff.

A més, la demostració anterior posa de manifest la importància de les condicions i), i ii) que tradueixen topològicament la derivabilitat i la integrabilitat. Així doncs, donarem la definició següent:

Sigui $\{F_n\}$ una família de tancats d'un espai topològic X. En el que segueix notarem, com hem anant fent anteriorment,

$$E_m = (F_m)^\circ,$$
$$E = \cup_n E_n \ , \ i$$
$$B = X \setminus E \, .$$

Evidentment, els subconjunts E_m, i E són oberts, i B és tancat.

Definició 7.4. *Sigui $\{F_n\}$ una família numerable de tancats d'un espai topològic X. Direm que la família és* integrable *si verifica:*

i) si $P \subseteq F_n$ és tal que $P \subseteq P'$, llavors $P \subseteq F_{n+1}$,

ii) si U és un obert connex de E_m i $\overline{U} \cap F_{m-1} \neq \emptyset$, llavors $U \subseteq E_{m-1}$.

Proposició 7.5. *Sigui X un espai topològic, connex i Hausdorff, i sigui $\{F_n\}$ una família numerable de tancats de X.*

Si X és localment connex, i $\{F_n\}$ és integrable, llavors:

1) La família d'interiors $\{E_n\}$ és creixent: $E_n \subseteq E_{n+1}$.

2) Si U és un obert connex de E_m i $\overline{U} \cap \overline{E_{m-p}} \neq \emptyset$, $p \geq 1$, llavors $U \subseteq E_{m-p}$.

3) Si U és un obert connex de la reunió $E = \cup_n E_n$, llavors existeix un m tal que $U \subseteq E_m$.

4) B és un subconjunt perfecte de X.

Demostració. Com que X no té punts aïllats, es té que $U \subseteq U'$, per a tot obert U de X, i 1) resulta de i).

2) se segueix, per inducció sobre $p \geq 1$, de ii) i 1).

Provem 3). Sigui $M = min\{n; U \cap E_n \neq \emptyset\}$, i sigui V una component connexa de $U \cap E_M$, que, per tant, serà un tancat de $U \cap E_M$. Com que X és localment connex, V és un obert de $U \cap E_M$, i, per tant, de U. Veurem que V també és un tancat de U, amb la qual cosa obtindrem

$$U = V \subseteq U \cap E_M \subseteq E_M.$$

Prenem un punt z de l'adherència de V en U. Com que $U \subseteq E$, existeix un m tal que $z \in E_m$. I, com que X és localment connex, existeix un entorn obert W de z, connex i contingut en $U \cap E_m$, tal que $W \cap V \neq \emptyset$, d'on resulta que $W \cap E_M \neq \emptyset$. Com que $W \subseteq E_m$ i $m \geq M$, de 2) resulta que $W \subseteq E_M$ i, per tant, $z \in E_M$. Així doncs, $z \in V$, ja que V és un tancat de $U \cap E_M$.

Provem ara 4). Suposem que B té punts aïllats. Sigui p un punt aïllat de B. Com que X és localment connex, existeix un obert connex W de X, tal que $W \cap B = \{p\}$, i $W \setminus \{p\}$ és no buit, ja que X no té punts aïllats. Notem $W_i, i \in I$, les components connexes de $W \setminus \{p\}$. Atès que cada W_i és un connex de E, per a 3), existeix un $s(i)$ tal que $W_i \subseteq E_{s(i)}$. Posem $M = min\{s(i)\}$. Com que $p \in \overline{W_i}$, per a tot i, aplicant 2), obtindrem $W_i \subseteq E_M$, per a tot i. Resulta, doncs, que $W \subseteq F_M$, i així $p \in E$, que contradiu l'elecció inicial de p. $\square$

Teorema 7.6. *Sigui $\{F_n\}$ un recobriment tancat i numerable d'un espai topològic X, connex i Hausdorff.*

Si X és localment connex i hereditàriament de Baire, i la família $\{F_n\}$ és integrable, llavors el recobriment és trivial. A més, existeix un N tal que $X = F_n$, per a tot $n \geq N$, i F_n és d'interior buit, per a tot $n < N$.

Demostració. Per hipòtesi, X satisfà el teorema de Baire, de manera que la reunió $E = \cup_n E_n$ és un obert dens de X, i per tant, $B = X \backslash E$ és un tancat d'interior buit. Suposant que B és no buit, arribarem a una contradicció.

Considerem el recobriment per tancats de B, $B = \cup_n B \cap F_n$.

Com que B és un tancat de X, B és de Baire, i una segona aplicació del teorema de Baire ens dona, com que X és localment connex, que existeix un obert connex V de X i un M tals que

$$\emptyset \neq V \cap B \subseteq F_M.$$

A més, com que $B = B'$ i V és obert, $V \cap B \subseteq (V \cap B)'$, i per tant, de i) se seguirà que $V \cap B \subseteq F_m$, per a tot $m \geq M$.

Veurem que totes les components connexes de

$$V \cap E = V \setminus V \cap B$$

estan contingudes en F_M i, per tant, que

$$V = (V \cap B) \cup (V \cap E) \subseteq F_M.$$

D'aquí resultarà que $V \subseteq E_M$, i això contradiu $\emptyset \neq V \cap B$.

Sigui U una component connexa de $V \cap E$. Com que V i E són oberts de X, $V \cap E$ és localment connex, i, per tant, U és un obert de $V \cap E$, i de V.

Per la proposició anterior, existeix un t tal que $U \subseteq E_t$. Sigui $s = min\{t; U \subseteq E_t\}$.

Si $s \leq M$, en resulta immediatament que $U \subseteq E_s \subseteq E_M \subseteq F_M$.

Suposem, ara, $s > M$.

Veiem que $\overline{U} \cap V \cap B \neq \emptyset$. En efecte, si $\overline{U} \cap V \cap B$ fos buit, tindríem que

$$\overline{U} \cap V = \overline{U} \cap (V \cap B \cup V \cap E) = U.$$

Per tant, U seria un obert i tancat de V, i, com que V és connex, en resultaria $V = U$, el que contradiria $\emptyset \neq V \cap B$.

Així, com que $s - 1 \geq M$, resulta que

$$\emptyset \neq \overline{U} \cap V \cap B \subseteq \overline{U} \cap F_{s-1},$$

i, per ii), s'obté que $U \subseteq E_{s-1}$, el que contradiu la definició de s.

Es dedueix, doncs, que B és buit i, per tant, que $X = E$.

En definitiva, s'obté que E és connex i, així, si E_N és l'interior no buit minimal, resulta que

$$X = E = E_N = F_N. \qquad \square$$

Comprovem que aquest resultat té com a corol·lari immediat el teorema de no partició de Hausdorff.

Demostració del teorema de no partició de Hausdorff. Amb les hipòtesis i notacions del teorema de Hausdorff, posem

$$T_n = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n,$$

i considerem el recobriment creixent $\{T_n\}$.

Com que la família $\{T_n\}$ és creixent, verifica la condició i) d'integrabilitat. Veiem que també verifica la condició ii).

Posem $E_n = (T_n)^\circ$. Com que T_n és la reunió disjunta dels tancats F_i, $1 \leq i \leq n$, resulta que

$$E_m = (F_1)^\circ \cup (F_2)^\circ \cup \ldots \cup (F_m)^\circ.$$

Així, si U és un obert connex de E_m, existeix un s, amb $1 \leq s \leq m$, tal que $U \subseteq (F_s)^\circ$, i resulta, per tant, que si $\overline{U} \cap T_{m-1} \neq \emptyset$, llavors $U \subseteq E_{m-1}$.

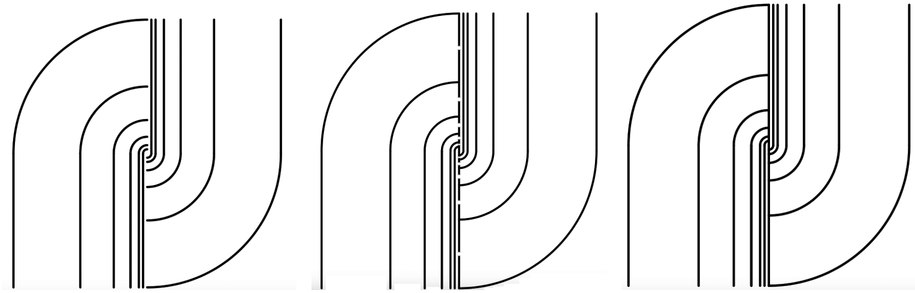
Per tant, del teorema anterior podem concloure que existeix un M tal que

$$X = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_M,$$

i, com que X és connex, existeix un N, amb $1 \leq N \leq M$, tal que $X = F_N$.

$\square$

Exemples. Donarem tres exemples de recobriments no trivials que ens poden ajudar a apreciar les diferències amb els teoremes de Sierpinski i de Hausdorff.



Tres exemples de recobriments no trivials

El primer exemple és de Sierpinski: és un espai connex tal que les seves components arc-connexes donen una partició de l'espai per tancats disjunts. Aquest espai no és compacte, i mostra així la importància de la hipòtesi de compacte en el teorema de Sierpinski. El segon exemple és de Knaster-Kuratowsky: és un espai connex, i localment compacte però no localment connex. Com que les seves components arc-connexes donen una partició per tancats disjunts, posa de manifest la importància de la hipòtesi de localment connex en el teorema de Hausdorff. L'últim exemple és un espai compacte i arc-connex, però no localment connex. Aquest espai no admet una partició per tancats disjunts pel teorema de Sierpinski, però sí que admet un recobriment per tancats, no trivial, que verifica les hipòtesis del teorema de Corominas-Sunyer, posant així de manifest l'extrema subtilesa del teorema de Corominas-Sunyer.

8. L'impacte del teorema

Avui dia, el teorema de Corominas i Sunyer és ben conegut i està molt ben valorat internacionalment; i probablement, qui més va contribuir a donar-lo a conèixer fou el matemàtic nord-americà Ralph Philip Boas, Jr.

Boas va ser un destacat analista, i un prolífic revisor de la revista *Mathematical Reviews*, de la qual va ser editor executiu. Ell havia publicat l'any 1935 una nota sobre el teorema de Pringsheim, que estudia quan una funció sobre un interval [a, b] infinitament derivable és analítica, i més tard havia signat la recensió al *Math. Rev.* dels articles [9], [8], de Corominas i Sunyer. És per això que coneixia prou bé el resultat dels matemàtics catalans.

Des del primer moment, Boas va trobar el teorema de Corominas-Sunyer molt interessant, i així és que primer el va exposar en alguna conferència, després el va donar a conèixer en la revista *Amer. Math. Monthly*, i, finalment, el va incorporar en el seu popular llibre, *A primer of real functions*, ([3]).

En aquesta obra, Boas donà un paper tan destacable al teorema de Corominas-Sunyer que Steven Gaal començà la seva recensió del llibre, en la secció corresponent del *Bull. Amer. Math. Soc.*, del 1962, ([10]), amb els termes següents:

> Long before this book was published Professor Boas told me of his plans to write a new Carus monograph on a less specialized topic than those presented in the last few volumes. He had already decided to write a first introduction to real variable theory and in order to have a guiding line he planned to include everything which is necessary to formulate and prove the following proposition:
>
> *Suppose the continuous real valued function* f *of a real variable* x *has derivatives of all orders everywhere and for each* x *there is an order* n(x) *such that the* n(x)*th derivative of* f *vanishes at* x. *Then* f *is a polynomial function.*

Avui dia, després d'una petita cerca a Google, podem trobar un bon grapat de llibres on s'inclou el resultat de Corominas-Sunyer:

– B. Bollobás, *Linear Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1999.

– A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, B. S. Thomson, *Real Analysis, Second Edition*, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

– A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

– P. G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Siam, 2013.

– W. F. Donoghue, Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, 1969.

– X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 2008.

– V. Kadets, *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*, Universitext, Springer, 2018.

– H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013

– K. A. Ross, *Elementary Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2013.

Dins d'aquest apartat, destacaré el llibre de Joan Cerdà que va editar Edicions de la Universitat de Barcelona, *Análisis Real*, 1996, en què el teorema de Corominas-Sunyer s'inclou ja en el primer capítol. L'autor és el professor d'aquesta Facultat Joan Cerdà, el qual, poc després d'acabar la llicenciatura, va conèixer Sunyer i Balaguer i va poder compartir amb ell tardes i converses.

El teorema de Corominas-Sunyer ha motivat variants, extensions i generalitzacions, algunes de les quals ja van ser recollides pels mateixos Corominas i Sunyer en el seu article. Aquest teorema també ha motivat extensions i generalitzacions a càrrec d'altres matemàtics.

Per exemple, atès que l'enunciat original del teorema de Corominas-Sunyer és per a funcions d'una variable real, una qüestió molt natural és l'extensió del resultat a diverses variables. I, efectivament, això és el que Boghossian i Johnson van demostrar, el 1990, en els termes següents, ([4]).

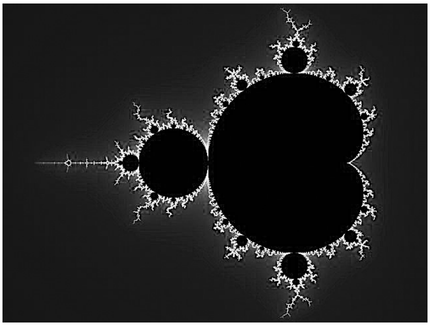
Teorema 8.1. *Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en un obert connex U de $\mathbb{R}^n$. Si per a tot $x \in U$, i tot j, $1 \leq j \leq n$, existeix un enter $\nu = \nu_j(x) \geq 0$, (que pot variar amb x i j,) tal que $\partial^\nu f / \partial x_j^\nu(x) = 0$, llavors $f(x)$ és un polinomi.*

De fet, més en general, podeu provar (com a exercici) el teorema de Corominas-Sunyer per a aplicacions diferenciables en espais de Banach, a partir de la versió original unidimensional.

M'hauria agradat exposar detalladament unes quantes d'aquestes interessants qüestions, però el marge de temps d'aquesta lliçó és massa estret perquè hi càpiguen, i només afegiré una petita especulació.

Sense la hipòtesi de «localment connex», el teorema de Corominas-Sunyer és fals en general, com hem vist anteriorment. Per això, seria interessant estudiar la relació que hi ha entre el teorema de Corominas-Sunyer i la conjectura MLC:

Conjectura (MLC). *El conjunt de Mandelbrot és localment connex.*



El conjunt de Mandelbrot

Per exemple, la validesa de la conjectura MLC i el teorema de Corominas-Sunyer implicarien la correcció de la conjectura següent:

Conjectura (CST). *Tot recobriment integrable del conjunt de Mandelbrot és trivial.*

Per tant, una resposta positiva a aquesta conjectura CST afegiria plausibilitat a la conjectura MLC.

Més generalment, l'estudi de la connexitat local dels conjunts de Mandelbrot, o de Julia, en dinàmica complexa, és un tema que ha originat una extensa bibliografia, i seria molt interessant trobar-hi alguna connexió amb el teorema de Corominas-Sunyer.

9. L'exili pòstum

Com hem dit abans, Ernest Corominas va haver d'exiliar-se el 1939 per motius polítics, prou evidents, i, més tard, el 1960, es va exiliar per motius acadèmics, ja que no va trobar al nostre país el lloc adequat per poder desenvolupar la seva activitat matemàtica.

Per la seva banda, Ferran Sunyer, a conseqüència de la seva discapacitat, va patir un confinament quasi perpetu, un confinament que Antoni Malet va qualificar d'«exili interior».

Però Ernest Corominas i Ferran Sunyer també han patit un altre exili: l'exili pòstum.

L'exili pòstum de Corominas ha sigut el de l'oblit. Un oblit que, afortunadament, van mirar de corregir els companys J. Bruna i J. Cufí, amb un detallat article al *Notícies* de la *SCM* del 2014.

Perquè, en general, de Corominas no se'n parla, o se'n parla ben poc, o quan se'n parla, de vegades, es fa superficialment.

Per exemple, en algun article en què es parla d'ell, es posa una foto suposadament seva, però resulta que la foto no és de Corominas, sinó de Willy Brandt!

Un altre exemple: Corominas fou un dels republicans exiliats que es van embarcar en el famós Winnipeg, en direcció a Xile, però no figura en cap de les llistes de personatges destacats d'aquell viatge. Hi figuren pintors, historiadors, periodistes, publicistes, actrius, etc., però no trobareu mai, en cap d'aquelles llistes, «Ernest Corominas, matemàtic».

I, aquí mateix, a la Universitat de Barcelona, la seva universitat, ben poc s'ha parlat d'ell.

L'exili pòstum de Sunyer és diferent. Ferran Sunyer i Balaguer va estar vinculat tota la seva vida professional a la Universitat de Barcelona. Aquí hi va fer la llicenciatura, i també el doctorat. D'una manera totalment excepcional, per raó de les seves circumstàncies excepcionals, però els va fer. Precisament, el 2012, en ocasió del centenari del naixement de Ferran Sunyer, el CRAI Biblioteca de Matemàtiques i Informàtica de la UB en va digitalitzar la tesi, ([15]).

Ferran Sunyer primer va ser col·laborador, i finalment investigador del Seminari Matemàtic de la Universitat de Barcelona. I molts dels seus articles porten l'afiliació: «University of Barcelona», «Seminario Matemático of the University of Barcelona», o variants d'això. N'és un exemple el seu article a *Acta Mathematica*, que porta l'afiliació «Séminaire Mathématique de l'Université de Barcelone».

Ferran Sunyer va col·laborar intensament amb la revista *Collectanea Mathematica* de la nostra universitat, en què va publicar un bon nombre d'articles (vuit exactament), i va aconseguir que importants matemàtics de la seva època, com ara W. Sierpinski, hi publiquessin alguns dels seus treballs.

En la seva correspondència, moltes cartes porten la capçalera de la Universitat de Barcelona; fins i tot en algunes es fa portaveu de la mateixa UB. Un bon exemple n'és la carta, ([16]), amb la capçalera de la Universitat de Barcelona, que Sunyer escriu al professor Henri Milloux de la Universitat de Bordeus.

> Prof H Milloux.
>
> Canderau
>
> Monsieur et cher Collègue
>
> [...]
>
> j'ai été chargé par le Séminaire Mathématique de l'Université de Barcelone de vous dire que nous serons très honores si vous pouvez donner une conférence dans le Séminaire. En suivant l'habitude de l'Université de Barcelone, vous recevrez 800Pts afin de compenser les frais du détour jusqu'à Barcelone.
>
> [...]

En d'altres mostra un sentiment especial envers la UB, com, per exemple, en la carta a Corominas del 14 de setembre de 1960, ([16]).

> Estimat amic Corominas,
>
> [...]
>
> Cregui que jo també el trobaré molt i molt a faltar, i sento que la Universitat de Barcelona no hagi sabut retenir-lo, ho sento per mi i per la Universitat.
>
> [...]

Ferran Sunyer va deixar un important arxiu, amb el seu fons bibliogràfic, separates d'articles, i una correspondència nombrosa i molt interessant. Gràcies a una lloable iniciativa de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, que l'ha dipositat a la Biblioteca de Ciència i Tecnologia de la UAB, ([16]), aquest arxiu és obert a tothom que vulgui consultar-lo. Jo mateix m'he aprofitat d'aquesta accessibilitat per preparar aquesta lliçó.

Com que sembla fora de qüestió que Ferran Sunyer i Balaguer formava part de ple dret de la Universitat de Barcelona, el fet que el seu arxiu no estigui dipositat a la UB m'ha produït sorpresa i tristor. El fet que documents amb la capçalera de la Universitat de Barcelona, i on es tracten temes de la UB, no estiguin als arxius de la UB, m'ha produït sorpresa i tristor. La mateixa sorpresa i tristor que m'ha produït llegir algunes de les biografies de Sunyer i Balaguer en què el nom de la Universitat de Barcelona no surt enlloc. És talment com si Sunyer i Balaguer s'hagués exiliat pòstumament lluny de la Universitat de Barcelona.

Tant Ernest Corominas i Vigneaux com Ferran Sunyer i Balaguer van estar molt vinculats a la Universitat de Barcelona, encara que segurament menys del que ells haurien volgut i merescut, i entre tots dos van escriure, en circumstàncies realment difícils, un meravellós teorema, un autèntic poema de les matemàtiques.

Avui, en aquesta inauguració del difícil curs 2020-2021 que tenim al davant, hem volgut renovar la seva presència a la Universitat de Barcelona i recordar aquest poema.

Referències

[1] R. Baire. «Sur les fonctions de variables réelles». *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 3:1-123, 1899.

[2] S. Banach and H. Steinhaus. «Sur le principe de la condensation des singularités». *Fundamenta Mathematicae*, 3:50-61, 1927.

[3] R. P. Boas, Jr. *A primer of real functions*. The Carus Mathematical Monographs, No. 13. The Mathematical Association of America; John Wiley and Sons, Inc.; New York, 1960.

[4] A. B. Boghossian and P. D. Johnson, Jr. «A pointwise condition for an infinitely differentiable function of several variables to be a polynomial». *J. Math. Anal. Appl.*, 151(1):17-19, 1990.

[5] E. Borel. «Sur quelques points de la théorie des fonctions». *Ann. Sci. École Norm. Sup (3)*, 12:9-55, 1895.

[6] G. Cantor. «Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen». *J. Reine Angew. Math.*, 77:258-262, 1874.

[7] G. Cantor. «Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1:75-78, 1891.

[8] E. Corominas i F. Sunyer i Balaguer. «Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio». *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, 14:26-43, 1954.

[9] E. Corominas i F. Sunyer i Balaguer. «Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynome». *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 238:558-559, 1954.

[10] I. S. Gál. «Book reviews, a primer of real functions. By R. P. Boas, Jr.» *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:10-12, 1962.

[11] F. Hausdorff. *Mengenlehre*. Verlag De Gruyter Co., 1927.

[12] W. Sierpinski. «Sur une courbe dont tout point est un point de ramification». *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 106:302-305, 1915.

[13] W. Sierpinski. «Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée». *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris*, 1162:629-632, 1916.

[14] W. Sierpinski. «Un théorème sur les continus». *Tohoku Math. Jour.*, 13:300-303, 1918.

[15] F. Sunyer i Balaguer. *Sobre los valores de una función representada por una serie de Dirichlet*. Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, Universitat de Barcelona, 1962.

[16] F. Sunyer i Balaguer. *Correspondència*. Univ. Aut. Barcelona, 1999. Dipòsit digital de documents de la UAB, https://ddd.uab.cat/collection/fsunyercor.

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Edicions